

Семинары 8-10. Некоторые представления алгебры Вирасоро.

Пусть $L_i = z^{i+1} \frac{\partial}{\partial z}$, $i \in \mathbb{Z}$ – стандартный базис в алгебре Ли векторных полей на окружности. Алгеброй Вирасоро называется центральное расширение Vir этой алгебры Ли при помощи элемента C , коммутатор задан как

$$[L_i, L_j] = (j - i)L_{i+j} + \delta_{i+j,0} \frac{i^3 - i}{12} C$$

Задача 1. Пусть $F_{\lambda,\mu}$ – представление алгебры Ли векторных полей в пространстве тензорных полей вида $z^{\mu+i} (\frac{\partial}{\partial z})^\lambda$.

(а) Покажите, что на пространстве $M_{\lambda,\mu} := \Lambda^{\frac{\infty}{2}} F_{\lambda,\mu}$ корректно определено действие алгебры Вирасоро.

(б) Докажите, что на $M_{\lambda,\mu}$ элемент $C \in Vir$ действует скаляром, и найдите этот скаляр.

Задача 2. Докажите, что при общих значениях $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ представление $M_{\lambda,\mu}$ неприводимо.

Задача 3. Постройте гомоморфизмы

(а) $M_{\lambda,\mu} \otimes F_{\lambda,\mu} \rightarrow M_{\lambda,\mu+1}$;

(б) $M_{\lambda,\mu} \otimes \Lambda^2 F_{\lambda,\mu} \rightarrow M_{\lambda,\mu+2}$;

(в) $M_{\lambda,\mu} \otimes \Lambda^k F_{\lambda,\mu} \rightarrow M_{\lambda,\mu+k}$.

Задача 4.

(а) При каких λ, μ в локальном пополнении модуля $\Lambda^k F_{\lambda,\mu}$ есть Vir -инвариантный элемент?

(б) Покажите, что при этих значениях параметров модуль $M_{\lambda,\mu+k}$ приводим.