Лекция 29.03.17

Исследованное на прошлом семинаре действие алгебры Ли $su(1,1)$ в компактной реализации основной неунитарной серии доставляет также и действие максимальной компактной подгруппы $K \simeq U(1) \subset SU(1,1)$. А именно, элемент $k = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ действует на вектор u_n по формуле

$$ku_n = e^{in\theta}u_n$$

Это частный случай модуля Хариш-Чандра. Абстрактное определение таково. Пусть G - вещественная группа G с алгеброй Ли $\mathbf{g}$, K - ее максимальная компактная подгруппа с алгеброй Ли $\mathbf{k}$ Векторное пространство V называется модулем Хариш-Чандра группы G (или $(\mathbf{g}, K)$- модулем), если V снабжено действиями алгебры $\mathbf{g}$ и группы K, согласованными в следующем смысле:

а) действие $\mathbf{k}$, полученное дифференцированием действия K, совпадает с ограничением на $\mathbf{k}$ действия $\mathbf{g}$

б) для любых $k \in K$, $g \in \mathbf{g}$ и $v \in V$ верно $kgk^{-1}v = \mathrm{Ad}_k(g)v$

Знание действия алгебры Ли на дифференцируемых векторах бесконечномерных представлений вещественных групп недостаточно для восстановления действия группы. Структура модуля Хариш-Чандра богаче. В частности, она позволяет восстанавливать т.н. "допустимые"унитарные представления полупростых групп. Условия "допустимости"состоят в том, что кратности вхождения неприводимых (конечномерных) K -модулей в разложение пространства дифференцируемых K-конечных векторов конечны и линейны по размерности этих представлений. Все подфакторы основных серий допустимы.

Аналитическое продолжение обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ позволяет определить сплетающие операторы $A_\chi : D_\chi \to D_{-\chi}$ в виде свертки с обобщенными функциями $|x|^{-s-1}$ и $|x|^{-s-1} \operatorname{sgn} x$ для всех $\chi = (s, \varepsilon)$, при условии, что $s \neq 0, 2, , ...,$ если $\varepsilon = 0$ и $s \neq 1, 3, ...,,$ если $\varepsilon = 1$. Особенности в целых неотрицательных точках легко устранить, перенормировав сплетающие операторы, например, положив

$$\tilde{A}_\chi = \frac{1}{\Gamma(-s)} A_\chi$$

Сплетающие операторы $\tilde{A}_\chi$ определены при всех χ. Вычислим композицию $\tilde{A}_{-\chi}\tilde{A}_\chi$. Поскольку сплетающий оператор задается сверткой с обобщенной функцией, естественно, естественно перейти к преобразованию Фурье этих функций.

Утверждение. Преобразование Фурье обобщенной функции $F[x_+^\lambda]$ есть обобщенная (по переменной ξ) функция $ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda+1)(\xi+i0)^\lambda$,

$$F\left[x_+^\lambda\right] = ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda+1)(\xi+i0)^\lambda \tag{1}$$

Док-во. Речь идет о вычислении интеграла $\int_0^\infty x^\lambda e^{i\xi x}dx$ при условии $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$. Дальше - аналитическое продолжение. Если заменить интеграл пределом при $\varepsilon \to +0$ абсолютно сходящегося в бесконечности интеграла $\int_0^\infty x^\lambda e^{(i\xi-\varepsilon)x}dx$, то в последнем контур можно деформировать в верхний луч мнимой оси, где он сводится к эйлерову интегралу

$$\int_0^{+i\infty} x^\lambda e^{(i\xi-\varepsilon)x}dx = \int_0^\infty \frac{(-i\bar{\xi}x)^\lambda}{(-i\bar{\xi})^\lambda}\frac{d(-i\bar{\xi}x)}{-i\bar{\xi}} = ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda+1)(\bar{\xi})^\lambda, \qquad \text{где } \bar{\xi} = \xi + i\varepsilon$$

В пределе $\varepsilon \to +0$ получим (1). Аналогично,

$$F\left[x_+^\lambda\right] = -ie^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda+1)(\xi - i0)^\lambda \tag{2}$$

Складывая и вычитая (1) и (2) и пользуясь линейными соотношениями между функциями $\xi \pm i0$ и $\xi_\pm^\lambda$, выписанными на прошлой лекции, получаем:

$$\begin{aligned} F[|x|^\lambda] &= -\,2\Gamma(\lambda+1)\sin\frac{\pi\lambda}{2}|\xi|^{-\lambda-1}, \\ F[|x|^\lambda \operatorname{sgn} x] &= 2i\Gamma(\lambda+1)\cos\frac{\pi\lambda}{2}|\xi|^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}\xi, \end{aligned}$$

так что

$$F\left[\frac{|x|^{s-1}}{\Gamma(s)}\right]F\left[\frac{|x|^{-s-1}}{\Gamma(-s)}\right] = 4\cos^2\frac{\pi s}{2}, \qquad F\left[\frac{|x|^{s-1}\operatorname{sgn} x}{\Gamma(s)}\right]F\left[\frac{|x|^{-s-1}\operatorname{sgn} x}{\Gamma(-s)}\right] = 4\sin^2\frac{\pi s}{2}$$

Это означает, что свертка обобщенных функций $\frac{|x|^{s-1}}{\Gamma(s)} * \frac{|x|^{-s-1}}{\Gamma(s)}$ пропорциональна $\delta(x)$ с коэффициентом пропорциональности $4\cos^2\frac{\pi s}{2}$, свертка обобщенных функций $\frac{|x|^{s-1}\operatorname{sgn} x}{\Gamma(s)} * \frac{|x|^{-s-1}\operatorname{sgn}}{\Gamma(s)}$ также пропорциональна $\delta(x)$ с коэффициентом пропорциональности $4\sin^2\frac{\pi s}{2}$. Соответственно композиция операторов $\tilde{A}_{-\chi}\circ\tilde{A}_\chi$ пропорциональна тождественному оператору в D_χ с коэффициентом пропорциональности $4\cos^2\frac{\pi s}{2}$, если $\varepsilon = 0$ и $4\sin^2\frac{\pi s}{2}$, если $\varepsilon = 1$. Тем самым операторы $\tilde{A}_{\pm\chi}$ обратимы, если $s \notin \mathbb{Z}+1$ и $\varepsilon = 0$ и $s \notin 2\mathbb{Z}$ и$\varepsilon = 1$. При выполнении этих условий представления D_χ основной серии неприводимы (отсутствуют инвариантные замкнутые подпространства). Это можно вывести, используя двойственность D_χ и $D_{-\chi}$, доказанный только что изоморфизм между ними и наличие циклического вектора в одном из них.

В особых точках представления основной серии являются <u>аналитическими</u>, т.е., формула действия группы приобретает вид

$$T_g f(x) = (bx+d)^{s-1} f\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right), \qquad s \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Случай $\varepsilon = 0$ соответствует нечетному s, случай $\varepsilon = 1$ - четному s. Обозначим эти представления символом D_s. Исследуем сплетающие операторы из D_s в D_{-s} для $s \geq 0$. (Ненормированный) оператор A_χ в этом случае определяется сверткой с обобщенной функцией x^{-s-1}. Для неприводимого представлении основной серии с тем же s, но противоположным ε обратимый сплетающий оператор, равный вычету A_χ, задается сверткой с $\delta^{(s)}(x)$, т.е., является оператором дифференцирования. Этот оператор сплетает в силу своей локальности и представления D_s и D_{-s}. Таким образом, имеем два оператора, сплетающих D_s и D_{-s},

$$A_s f(x) = x^{-s-1} * f(x), \qquad B_s f(x) = (-1)^s \delta^{(s)}(x) * f(x) = \frac{d^s}{dx^s} f(x)$$

Пространство $E_s \subset D_s$ многочленов степени не более $s-1$ является ядром оператора B_s. Образ F_{-s} оператора B_s состоит из функций $f(x) \in D_{-s}$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-t)^k f(t)dt = 0, \qquad k = 0, 1, ..., s-1$$

С одной стороны, интегрированием по частям нетрудно убедиться, что свертка многочлена степени меньше s с s-ой производной равна нулю. С другой стороны, в силу инвариантности относительно действия группы достаточно убедиться, что любая финитная функция $f(x)$ с нулевыми вплоть до $s-1$ моментами есть $(s-1)$ производная. Для этого используется s-я итерация интеграла $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Воспользовавшись формулами Сохоцкого, рассмотрим теперь вместо операторов A_s и B_s их линейные комбинации $A_s^{\pm}$,

$$A_s^{\pm} f(x) = \frac{s!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x\pm i0)^{s+1}} dt \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{(s)}(t)}{t-x\pm i0} dt$$

В этом равенстве использованы асимптотики функций из D_s. Они интерпретируются, как разложение s-ой производной $f(x)$ в разность функций, голоморфно продолжаемых в верхнюю и нижнюю полуплоскость. В силу того, что $f^{(s)}(x)$ имеет асимптотику $1/x$ при $x \to \pm\infty$, это разложение существует и единственно по теореме Племеля-Сохоцкого. Обозначим через $D_s^{\pm}$ ядра операторов $A_s^{\mp}$, а через $F_{-s}^{\pm}$ образы операторов $A_s^{\pm}$. Тогда

$$\begin{aligned} D_s/E_s = & D_s^{+}/E_s \oplus D_s^{-}/E_s, \qquad \text{соответственно} \qquad F_{-s} = F_{-s}^{+} \oplus F_{-s}^{-}, \\ & A_s^{+} : D_s^{+}/E_s \simeq F_{-s}^{+}, \qquad\qquad A_s^{-} : D_s^{-}/E_s \simeq F_{-s}^{-} \end{aligned}$$

Таким образом, представление D_s при $s = 0, 1, \ldots$ обладает конечномерным подмодулем E_s размерности s, а фактор по нему разлагается в прямую сумму двух представлений. Представление D_{-s} содержит два непересекающихся подмодуля $F_{-s}^{\pm}$, фактор по их прямой сумме изоморфен конечномерному представлению E_s.

Представления $F_s^{\pm}$, $s = -1, -2, \ldots$ называются представлениями дискретной серии (иногда голоморфной и антиголоморфной соответственно). Представления $F_0^{\pm}$ носят название предела дискретной серии. По построению, представление F_s^{+} может быть реализовано в пространстве функций $f(z)$, голоморфных в верхней полуплоскости и бесконечно дифференцируемых в ее замыкании с асимптотическим условием, что функция $f(-1/z)$ обладает теми же свойствами. Действие группы описывается формулой (3). Это представление неприводимо и унитарно. Скалярное произведение в представлениях голоморфной дискретной серии задается формулой

$$(f,g) = \iint_{\operatorname{Im} z>0} f(z)\bar{g}(z)(\operatorname{Im} z)^{-s-1} dz d\bar{z}.$$

При $s = 0$ инваринтное скалярное произведение получается ограничением скалярного произведения в унитарной серии

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)dx$$

В координатах группы $SU(1,1)$ представление дискретной серии F_s^{+} получает реализацию функций, аналитических в единичном круге и дифференцируемых в замыкании с действием

$$T_g\psi(w) = (\bar{\alpha} + \beta w)^{s-1} \psi\left(\frac{\alpha w + \bar{\beta}}{\bar{\alpha} + \beta w}\right)$$

Скалярное произведение имеет вид

$$(f,g) = \iint_{|w|<1} f(w)\bar{g}(w)(1-|w|^2)^{-s-1} dw d\bar{w}.$$

Литература

И.М.Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин, Обобщенные функции 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, гл. VII