Лекция 5.04.17

1. *Формулы следа.* Действие полупростых вещественных групп G в представлениях основной серии осуществляется операторами, для которых определено понятие следа. Более точно. Понятие следа корректно определено для операторов L Гильберта-Шмидта, которые являются операторами в гильбертовом гильбертово пространстве $\mathcal{H}$ с абсолютно сходящимся рядом (Le_i, e_j), где $\{e_i\}$ - полная ортонормированная система в $\mathcal{H}$. След определен и для ядерных операторов, представимых в виде произведения двух операторов Гильберта-Шмидта. В частности, интегральный оператор

$$Af(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)f(y)dy,$$

с гладким ядром с компактным носителем - ядерный и его след равен

$$TrA = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,x)dx$$

Пусть $\pi_{\mathcal{H}} : G \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ непрерывное представление G в топологическом векторном пространстве $\mathcal{H}$. Для всякой непрерывной функции $\varphi(g)$ на G с компактным носителем определим оператор $\pi_{\mathcal{H}}(\varphi) \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ по формуле

$$\pi_{\mathcal{H}}(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi_{\mathcal{H}}(g)dg$$

Таким образом определяется представление групповой алгебры, при котором свертка функций переходит в произведение. Утверждается, что оператор $\pi_{\mathcal{H}}(\varphi)$, где $\varphi \in C_0^\infty(G)$, а $\pi_{\mathcal{H}}$ - допустимое представление полупростой группы (в частности, представление основной серии или любой его подфактор), ядерный. В силу этого след $Tr_{\mathcal{H}}\pi_{\mathcal{H}}(g)$ является непрерывным функционалом на пространстве $C_0^\infty(G)$, т.е. обобщенной функцией на группе.

<u>Утверждение</u> (Хариш-Чандра). Обобщенная функция $Tr_{\mathcal{H}}\pi_{\mathcal{H}}(g)$ представляется локально интегрируемой функцией на группе для всякого допустимого представления.

Вычислим след в представлении D_χ основной серии группы $SL(2,\mathbb{R})$, воспользовавшись языком обобщенных функций. Довести доказательство до строгого можно, перейдя к компактной реализации и заменив δ-функцию δ образной последовательностью гладких функций. Запишем оператор действия в виде интегрального оператора

$$T_g f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)f(y)dy \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(y - \frac{ax+c}{bx+d}\right)|bx+d|^{s-1}\operatorname{sgn}^\varepsilon(bx+d)f(y)dy$$

так что

$$Tr_\chi(g) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,x)dx \ = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{ax+c}{bx+d}\right)|bx+d|^{s-1}\operatorname{sgn}^\varepsilon(bx+d)dx$$

Сделаем замену переменных $t = bx + d$:

$$\begin{aligned} Tr_\chi(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt|t|^{s-1}\operatorname{sgn}^\varepsilon(t)\delta\left(\frac{t^2-(a+d)t+1}{bt}\right)\frac{dt}{b} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt|t|^{s}\operatorname{sgn}^\varepsilon(t)\delta((t-\lambda)(t-\lambda^{-1})) \end{aligned}$$

$$
(1) \qquad = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{|t|^s \operatorname{sgn}^\varepsilon(t)}{|\lambda-\lambda^{-1}|} \delta((t-\lambda)+(t-\lambda^{-1}) & = \dfrac{|\lambda|^s+|\lambda|^{-s}}{|\lambda-\lambda^{-1}|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ 0, & \lambda \notin \mathbb{R} \end{cases}
$$

Здесь λ и λ^{-1} - собственные значения g. При выводе использовались следующие свойства обобщенной функции $\delta(x)$:

$$
\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t), \qquad \delta(t^n g(t)) = |t|^{-n}\delta(g(t)),
$$
$$
\delta((t-a)(t-b)) = \frac{1}{|a-b|}(\delta(t-a)+\delta(t-b)) =, \qquad a, b \in \mathbb{R}
$$

которые следуют из определения

$$
(\delta(g(t)), \varphi(t)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{|g(t)|<\varepsilon} \varphi(t) dt.
$$

Полупростые элементы группы $SL(2,\mathbb{R})$ разбиваются на два класса: гиперболические, характеризуемые условием $|a+d| > 2$ сопряжены элементам картановской подалгебры $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, характеризуемые условием $|a+d| > 2$ сопряжены элементам картановской подалгебры $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ Характер представления D_χ, согласно (1) имеет различное поведение на этих классах. Локальную интегрируемость соответствующей функции можно наблюсти, заметив, что

$$
|\lambda - \lambda^{-1}| = \sqrt{(a+d)^2-4} = \sqrt{|a+d-2|}\sqrt{|a+d+2|}
$$

так что след ведет себя как $|t|^{-1/2}$ в особых точках и интегрируем в них

[1]Формула (1) позволяет вычислить также характеры представлений дискретной серии. Это возможно благодаря следующим соображениям:

1) Характер соответствующего аналитического представления D_s, $s = 1, 2, ...$ основной серии равен сумме характеров трех неприводимых подфакторов: представлений $F^{\pm}_{-s}$ основной серии и конечномерного представления E_s размерности s

2) Характер конечномерного представления E_s описывается глобальной формулой $\frac{\lambda^s-\lambda^{-s}}{\lambda-\lambda^{-1}}$

3) Представления $F^{\pm}_{-s}$ сопряжены внешним автоморфизмом, задаваемым матрицей $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$. Причина: функции, аналитические в верхней полуплоскости, переходят в функции, аналитические в нижней, при преобразовании аргумента $z \to -z$.

4) Сопряжение матрицей S тривально на гиперболических классах сопряженных элементов и сводится к замене знака угла на эллиптических:

$$
S\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

Эти соображения позволяют написать системы двух линейных уравнений на ограничения характеров $F^{\pm}_{-s}$ на классы гиперболических и эллиптических элементов. Ответ можно найти в книгах 1,2,3.

---

[1]Этого не было на лекции

2. *Гармонический анализ (преобразование Фурье). Мера Планшереля*

Теорема Петера-Вейля говорит о том, что матричные элементы неприводимых представлений компактной группы K образуют полную ортогональную систему в $L_2(K)$. Более точно. Пусть $\{\pi_a : K \to \operatorname{End} V_a\}$ набор всех неприводимый конечномерных представлений K. Они унитарны. Пусть $\{e_i^a\}$ - ортонормированный базис в V_l и $\tau_{ij}^a = \int_K dk(e_i, \pi_a(k)e_j)$. Тогда

$$(\tau_{ij}^a, \tau_{km}^b) = \int_K dk \tau_{ij}^a(k)\bar{\tau}_{km}^b(k) = d_a^{-1}\delta_{ab}\delta_{ik}\delta_{jm}, \tag{2}$$

где d_a- размерность представления V_a. Соотношение (2) следует из леммы Шура. Для этого для всякого линейного отображения $h : V_a \to V_b$ построим отображение $\tilde{h} : V_a \to V_b$ по правилу

$$\tilde{h} = \int_K dk \pi_b(k) h \pi_a(k^{-1})$$

Отображение $\tilde{h}$ - сплетающий оператор:

$$\pi_b(k_0)\tilde{h} = \int_K dk \pi_b(k_0 k) h \pi_a(k^{-1}) = \int_K d(k_0 k)\pi_b(k_0 k) h \pi_a((k k_0)^{-1} k_0) = \tilde{h}\pi_a(k_0).$$

По лемме Шура, $\tilde{h} = 0$, если $a \neq b$ и $\tilde{h} = \lambda 1_{V_a}$, если $a = b$. В качестве h выбираем матричную единицу E_{jk}, $E_{jk}(e_n^b) = \delta_{kn} e_j^a$ и вычислим матричный коэффициент $(e_i^a, \tilde{h} e_m^b)$. Получим равенство (2). Константа λ при $a = b$ вычисляется взятием следов обеих частей равенства и оказывается равной d_b^{-1}. Нетривиальная часть теоремы Петера-Вейля - доказательство полноты системы матричных коэффициентов. Для матричной группы она, как обычно, следует из теоремы Вейерштрасса о приближении любой непрерывной функции на компакте многочленами.

Преобразование: $\{$функция $f(k)$ на группе$\} \to \{$набор ее матричных коэфициентов $(\tau_{ij}^a, f)\}$, или что то же самое $\{$ набор операторов $\pi_a(f)\}$ можно рассматривать как преобразование Фурье на группе K. Соответствующее равенство Парсеваля может быть записано в виде

$$|f|^2 = \sum_a d_a ||\pi_a(f)||^2$$

Здесь слева стоит квадрат нормы функции как элемента $L_2(K)$, (считается, что объем группы равен 1), справа - квадрат нормы матрицы- сумма квадратов модулей ее матричных элементов. Коэффициенты d_a, равные размерности представления, можно рассматривать как веса дискретной меры Планшереля $\sum_a d_a \delta(a)$ на множестве всех неприводимых представлений K. Формула обращения преобразования Фурье следует из соотношения

$$f(1_K) = \sum_a d_a Tr \pi_a(f) \tag{3}$$

Вот ее вывод. Разложим функцию по ортогональной системе матричных коэффициентов:

$$f(k_0) = \sum_{a,i,j} d_a \tau^a_{ij}(k_0)(f, \tau^a_{ij}) = \sum_{a,i,j} d_a \tau^a_{ij}(k_0) \int_K dk f(k) \bar{\tau}^a_{ij}(k) \tau^a_{ij}(g)$$
$$= \sum_{a,i,j} d_a (e^a_i \pi_a(k_0) e^a_j) \int_K dk f(k)(\pi_a(k) e_j, e_i) = \sum_{a,i,j} d_a (e^a_i \pi_a(k_0) e^a_j)(\pi_a(f) e_j, e_i)$$

Полагая $k_0 = 1_K$, получаем (3).

Аналог этих результатов для группы $SL(2,\mathbb{R})$ выглядит следующим образом. В разложении пространства $L_2(SL(2,\mathbb{R}))$ по неприводим унитарным представлениям входят представления $D_{i\rho,\varepsilon}$ основной унитарной серии и представления $F^{\pm}_s$ дискретной серии. Для всякой функции $f \in L_2(SL(2,\mathbb{R})) \cap L_1(SL(2,\mathbb{R}))$ обозначим через $T_{i\rho}$ оператор $\pi_{D_{i\rho,0}}(f)$ в представлении основной унитарной серии $D_{i\rho,0}$ ($\varepsilon = 0$), а через $\Theta_{i\rho}(f)$ его след. Соответственно через $\tilde{T}_{i\rho}$ обозначается оператор $\pi_{D_{i\rho,1}}(f)$ в представлении основной унитарной серии $D_{i\rho,0}$ ($\varepsilon = 1$), и через $\tilde{\Theta}_{i\rho}(f)$ его след. Далее, для всякого $n = 1, 2, ...$ обозначим через $T^{\pm}_n(f)$ оператор $\pi_{F^{\pm}_{-n}}(f)$ в представлении дискретной серии $F^{\pm}_{-n}$ и через $\Theta^{\pm}_n(f)$ его след. Тогда

$$2\pi f(1) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{i\rho}(f)\rho \operatorname{th}\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) d\rho + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Theta}_{i\rho}(f)\rho \operatorname{cth}\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) d\rho$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n\Theta^{+}_n(f) + \sum_{n=1}^{\infty} n\Theta^{-}_n(f)$$

с формулой Планшереля

$$2\pi |f|^2 = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |T_{i\rho}(f)|^2 \rho \operatorname{th}\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) d\rho + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{T}_{i\rho}(f)|^2 \rho \operatorname{cth}\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) d\rho$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n|T^{+}_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n|T^{-}_n(f)|^2$$

При этом инвариантная мера на группе нормирована как $\frac{dadbdc}{2\pi a}$ Приведенные формулы можно рассмотривать как разложение $L_2(SL(2,\mathbb{R}))$ в прямой интеграл гильбертовых пространств по мере Планшереля, которая раскладывается на две непрерывных ветви $\rho \operatorname{th}\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) d\rho$ и $\rho \operatorname{cth}\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) d\rho$ и дискретную часть. Соответствующее вложение пространства дискретной серии разобрано в задаче семинара. Отметим, что гиперболические множители при непрерывных частях меры совпадают с множителями, возникающими при композиции уненормированных сплетающих операторов.

Литература

1. A.Knapp, Representation Theory of Semisimple Groups. An overview based on examples, Princeton Univ.Press, 1986, Ch X, XI
2. И.М.Гельфанд, М.И. Граев, И.И.Пятецкий-Шапиро, Обобщенные функции 6. Теория представлений и автоморфные функции, гл. II
3. С. Ленг, $SL(2,\mathbb{R})$. гл. VII, VIII