Группы и алгебры Ли II. Семинар 5.04.17

Задача 1. Углы Эйлера.

а) Всякая матрица $u \in SU(2)$ однозначно представляется в виде

$$u = \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi)}\cos\theta & ie^{i(\varphi-\psi)}\sin\theta \\ -ie^{i(\psi-\varphi)}\sin\theta & e^{-i(\varphi+\psi)}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ -i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix}$$

где $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < \pi$, $0 \le \psi < 2\pi$

б) Всякая матрица $g \in SU(1,1)$ однозначно представляется в виде

$$g = \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi)}\operatorname{ch}\theta & e^{i(\varphi-\psi)}\operatorname{sh}\theta \\ e^{i(\psi-\varphi)}\operatorname{sh}\theta & e^{-i(\varphi+\psi)}\operatorname{ch}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix}$$

где $0 \le \theta < \infty$, $0 \le \varphi < \pi$, $0 \le \psi < 2\pi$

в) перепишите разложение б) в параметрах $SL(2,\mathbb{R})$

г) Каковы должны быть области изменения параметров ψ, φ, θ для параметризации группы $SL(2,\mathbb{C})$?

Задача 2. а) Инвариантная мера на группе $SU(2)$ имеет вид $du = \sin 2\theta d\theta d\varphi d\psi$

б) инвариантная мера на группе $SU(1,1)$ имеет вид $dg = \operatorname{sh} 2\theta d\theta d\varphi d\psi$

в) выпишите в углах Эйлера инвариантную меру на группе $SL(2,\mathbb{C})$

г) другое представление инвариантной меры на $SL(2,\mathbb{R})$: $dg = a^{-1} da db dc$

Задача 3. а) Покажите, что функция α^{-m-1}, $m \ge 1$, а также функции $\alpha^{-m-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k$, $k \ge 0$ принадлежат $L_2(SU(1,1))$ (групповой элемент записан в виде $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$)

б) Указанные функции описывают вложение представления F_{-m} дискретной серии в $L_2(SU(1,1))$

Задача 4. а) Покажите. что сплетающий оператор $A_\chi : D_\chi \to D_{-\chi}$ между представлениями основной серии группы $SL(2,\mathbb{R})$ в реализации индуцированного представления может быть записан в виде регуляризованного интеграла по группе N верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали

$$A_\chi f(g) = \int_N f(w_0 n g) dn, \qquad \text{где} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

б) Предъявите нетривиальные сплетающие операторы в основной серии представлений групп $SL(n,\mathbb{R})$.