Лекция 9. Гармонические функции.

1 Напоминание: предел решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Теорема 1 *Пусть* $u_t = \Delta u,\ t \in [0, +\infty),\ x \in D,\ u|_{t=0} = \varphi,\ u|_{\partial D = f}$, *где* D *- диск,* $\varphi \in C^4(D),\ f = \varphi|_{\partial\Omega}$. *Тогда существует предел*

$$v(x) = \lim_{t \to +\infty} u(t, x),$$

который является решением задачи

$$\Delta v = 0,\ v|_{\partial D} = f. \tag{1}$$

Задача (1) называется *задачей Дирихле*. Ее решением мы сейчас и займемся.

2 Три определения оператора Лапласа.

Определение 1 *(Самое распространенное и самое плохое: оно привязано к системе координат, которая считается ортогональной, но этого никогда не говорят)*

$$\Delta = D^2_{x_1} + \cdots + D^2_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{2}$$

Следующие два определения требуют наличия Евклидовой структуры.

Определение 2

$$\Delta = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}$$

Определение 3

$$(\Delta u)(x_0) = \lim \frac{2n}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S^{n-1}(x_0, r)} u(x) ds - u(x_0)$$

Здесь $S^{n-1}(x_0, r)$ - $n-1$-мерная сфера с центром x_0 и радиусом r, ds - элемент площади поверхности, по которой проводится интегрирование, Ω_{n-1} площадь единичной $n-1$-мерной сферы.

Эквивалентность этих определений будет доказана на занятии.

3 Первые свойства гармонических функций.

Теорема 2 *Поток градиента гармонической функции через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Доказательство Теорема следует из формулы Гаусса-остроградского и определения 2. ☐

Теорема 3 *[Теорема о среднем] Среднее значение гармонической функции по сфере равно ее значению в центре.*

Определение 3 говорит, что это равенство выполняется в пределе при $r \to 0$. Теорема 3 утверждает, что равенство выполняется при любом r.

Доказательство (словами). Фиксируем центр сферы и рассмотрим среднее значение гармонической функции u по сфере радиуса r как функцию F от r/ Производная этой функции в точке r равна потоку градиента функции u через сферу радиуса r (с точностью до множителя, не зависящего от r). Этот поток равен нулю по теореме 2. Значит, функция F постоянна. Ее предел при $r \to 0$ равен $u(x_0)$. Значит, она всюду равна $u(x_0)$. ☐

Доказательство (формулами). Имеем:

$$F(r) = \frac{1}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S^{n-1}(x_0,r)} u(x) ds = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}(x_0,1)} u(ry) ds, \ y \in S^{n-1}(x_0, 1).$$

Тогда

$$F'(r) = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}(x_0,1)} \frac{\partial u}{\partial n}(ry) ds = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}(x_0,1)} (\text{grad } u(ry), n(ry)) ds$$

$$= \frac{1}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S^{n-1}(x_0,r)} (\text{grad } u(x), n(x)) ds_r.$$

Здесь n - единичная нормаль к сфере $S(x_0, r)$.

Интеграл в правой части - это поток градиента u через сферу $S(x_0, r)$. Он равен нулю по теореме 2. Значит, $F(r) = \text{const } = \lim_{r=0} F(r) = u(x_0)$. ☐

4 Принцип максимума для гармонических функций.

Теорема 4 *Если функция u - гармоническая в линейно связной области Ω и непрерывная вплоть до границы, причем максимум u принимается во внутренней точке, то $u = const$.*

Доказательство Пусть Ω - шар с центром x_0, $u \neq \text{const}$ и $u(x_0) = \max_\Omega u$, $x_0 \notin \partial\Omega$. Возьмем точку x_1, в которой $u(x_1) < u(x_0)$ и проведем сферу S с центром x_0 через точку S_1. Она принадлежит Ω, поскольку Ω - шар. Среднее по ней будет меньше максимума u - противоречие.

Пусть Ω - любая линейно связная область, $u(x_0) = \max u$, $u(x_1) < \max u$. Соединим точки x_0 и x_1 кривой и покроем ее конечным числом шаров так, что центр первого x_0, а центр каждого принадлежит предыдущему. Тогда в каждом шаре функция постоянна и равна $u(x_0)$ (индукция по числу шаров). Следовательно, $u(x_1) = u(x_0)$ - противоречие. □

5 Единственность решения задачи Дирихле.

Теорема 5 *Задача* (1) *имеет не больше одного решения.*

То, что она всегда имеет решение, будет доказано ниже.

Доказательство Пусть задача (1) имеет два разных решения. Тогда их разность - гармоническая функция с нулевым граничным условием. Такая функция тождественно равна нулю по принципу максимума - противоречие. □

6 Гармонические функции на плоскости.

Теорема 6 *Функция на плоскости - гармоническая тогда и только тогда, когда она является вещественной частью голоморфной функции.*

Доказательство Форма $u_x dx + u_y dy$ точна. Но и форма $\omega = -u_y dx + u_x dy$ точна в любом диске! Действительно,

$$d\omega = \Delta u dx \wedge dy = 0.$$

По лемме Пуанкаре, существует функция v, удовлетворяющая вместе с u условиям Коши-Римана. Значит, функция $u + iv$ голоморфна.

В другую сторону теорема доказана в комплексном анализе. □

7 Решение задачи Дирихле для круга.

Решаем задачу Дирихле для круга; граничная функция f может быть комплексной.

Теорема 7 *Решение задачи Дирихле для круга с C^2-гладкими начальными данными существует.*

Доказательство Разлагаем f в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\varphi}.$$

Продолжим функцию $e^{ik\varphi}$ до гармонической в круге:

$$e^{ik\varphi} = z^k|_{r=1},\ k \geq 0, \quad e^{ik\varphi} = \bar{z}^{-k}|_{r=1},\ k < 0$$

Положим:

$$u(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k + \sum_{k<0} a_k \bar{z}^{-k}. \tag{3}$$

Все члены этого ряда - гармонические. Докажем, что и сумма ряда такова. Члены ряда убывают экспоненциально в любом круге с центром 0 и радиусом меньше 1. Поэтому ряд (3) можно дифференцировать почленно. Его слагаемые - гармонические функции, значит, и сумма гармоническая. Ряд сходится равномерно на окружности, поскольку $f \in C^2$. Значит, он сходится равномерно и на замкнутом круге. Следоваьельно, граничные условия удовлетворены. □

8 Формула Пуассона.

Комбинируя формулу (3) с выражением для коэффициентов Фурье функции на окружности, можно получить интегральное представление решения задачи Дирихле для единичного круга, аналогичное интегральной формуле Коши.

По формуле для коэффициентов Фурье,

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(\alpha)e^{-ik\alpha d\alpha}.$$

По формуле (3)

$$2\pi u(re^{i\varphi}) = \sum_{k\geq 0}\int_{S^1} f(\alpha)r^k e^{ik(\varphi-\alpha)}d\alpha + \sum_{k<0}\int_{S^1} f(\alpha)r^{-k}e^{ik(\varphi-\alpha)}d\alpha.$$

Всюду ниже интеграды беруься по S^1. Переходим к суммированию по $k > 0$. Выделяем член с $k = 0$.

$$2\pi u(re^{i\varphi}) = \int_{S^1} f(\alpha)(1 + 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik(\varphi-\alpha)})d\alpha.$$

Сумма геометрической прогрессии под интегралом имеет вид

$$\frac{re^{i(\varphi-\alpha)}}{1 - re^{i(\varphi-\alpha)}}.$$

Простые тождественные преобразования дают:

$$u(re^{i\varphi}) = \int f(\alpha)K(r,\varphi,\alpha)d\alpha, \tag{4}$$

где

$$K(r,\varphi,\alpha) = \frac{1-r^2}{2\pi(1+r^2-2r\cos(\varphi-\alpha))}. \tag{5}$$

Эта функция называется ядром Пуассона, а сама формула (4), (5) - формулой Пуассона.

9 Задача Дирихле с непрерывными граничными условиями.

Теорема 8 *Задача Дирихле с непрерывными граничными условиями в круге разрешима.*

Доказательство Рассмотрим две последовательности C^2-гладких функций, равномерно сходящихся к f сверху и снизу: $f_n \searrow f,\ g_n \nearrow f$. Пусть

$$u_n(re^{i\varphi}) = \int f_n(\alpha)K(r,\varphi,\alpha)d\alpha, \tag{6}$$

$$v_n(re^{i\varphi}) = \int g_n(\alpha)K(r,\varphi,\alpha)d\alpha, \tag{7}$$

$$u(re^{i\varphi}) = \int f(\alpha)K(r,\varphi,\alpha)d\alpha.$$

Разность $u_n - v_n \rightrightarrows 0$ по принципу максимума. Далее,

$$v_n \le u \le u_n,$$

поскольку ядро Пуассона неотрицательно. Значит,

$$u_n \rightrightarrows u.$$

Следовательно, функция u непрерывна на всем круге.

Она гармонична, посколку ядро Пуассона гармонично по r, φ. □

Следствие 1 *Равномерный предел гармонических функций - гармоническая функция.*

Доказательство Пусть функции u_n выражены по формуле (6). Тогда их равномерный предел выражается по формуле (4). Следовательно, он гармоничен. $\square$

Следствие 2 *Непрерывная функция, удовлетворяющая теореме о среднем - гармоническая.*

Доказательство Пусть u - такая функция, D - произвольный диск в ее области определения, $u|_{\partial D} = f$. Пусть v - решение задачи Дирихле с граничным условием f. Тогда разность $u - v$ тоже удовлетворяет теореме о среднем, а, значит, и принципу максимума. Но ее граничное условие равно нулю. Значит, она сама равна нулю, т.е. $u \equiv v$. $\square$

10 Решение задачи Дирихле для произвольной области.

Теорема 9 *Пусть Ω - область на плоскости с гладкой границей. Тогда задача Дирихле с непрерывным граничным условием в области Ω имеет единственное решение.*

Доказательство По теореме Римана об отображении, существует биголоморфное отображение $\varphi : \Omega \to D$. По теореме Каратеодори, это отображение продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей. Пусть v - решение задачи Дирихле на D с граничным условием $f \circ (\varphi^{-1}_{\partial D})$. Оно существует по теореме 8. Значит, $u = v \circ \varphi$ - решение исходной задачи. Действительно, суперпозиция с биголоморфным отображением переводит голоморфные функции в голоморфные, а, значит, гармонические в гармонические. $\square$