Лекция 10. Задача Штурма-Лиувилля.

1 Уравнение колебаний неоднородной струны и его упрощение.

Пусть $T(x)$ - переменное натяжение струны, а $\rho(x)$ - ее плотность. Тогда уравнение колебаний струны имеет вид:

$$(T_{u_x})_x = \rho u_{tt},\ T > 0,\ \rho > 0.$$

Заменой $u = z(x)v$ приведем это уравнение к виду:

$$\left(\frac{T}{\rho}v_x\right)_x - qv = v_{tt}, \tag{1}$$

где $q(x)$ - некая функция. Имеем:

$$\frac{1}{\rho}(T(zv_{xx} + 2z_xv_x + z_{xx}v) + T_x(zv_x + z_xv)) - zv_{tt}.$$

Делим на z. Хотим, чтобы получилось (1):

$$\frac{T}{\rho}v_{xx} + \left(\frac{T}{\rho}\right)_x v_x - qv = v_{tt}.$$

Для этого нужно: $\frac{2z_xT}{\rho z} + \frac{T_x}{\rho} = (\frac{T}{\rho})_x$.

Достаточно взять $z = \rho^{-\frac{1}{2}}$. Итак, рассматриваем оператор

$$A : X \mapsto -\left(\frac{T}{\rho}X'\right)' + qX.$$

Ищем его собственные значения на пространстве $C_0^2[0,l] : X \in C^2[0,l],\ X(0) = X(l) = 0$. Это - задача Штурма - Лиувилля.

Без ограничения общности можно считать, что $q \geq 0$, иначе заменим A на $A + \lambda E$.

2 Простейшие свойства оператора A.

Оператор A симметричен и положительно определен.

Следствие 1 *Все его собственные значения вещественны и положительны.*

Они однократны по теореме единственности для уравнения $AX = \lambda X$ с нашим оператором A. Для простоты будем считать, что $\frac{T}{\rho} \equiv 1$, то есть

$$A : X \mapsto -X'' + qX.$$

3 Обратный оператор.

Мы докажем, что оператор A^{-1} - симметрический интегральный оператор, и из свойств его спектра выведем свойства спектра оператора A.

Решаем задачу:

$$AX = f. \tag{2}$$

Эвристический подход. Найдем функцию $G(x, \xi)$ так, что

$$AG(x, \xi) = \delta(\xi - x).$$

Тогда функция

$$X = \int G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

решает уравнение (2). Действительно:

$$AX(x) = \int A_x G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int \delta(\xi - x) f(\xi) d\xi = f(x).$$

Обоснованный подход. Возьмем непрерывную функцию $G(x, \xi)$ так, что она является решением уравнения $AX = 0$ при $x \neq \xi$, имеет излом первой производной при $x = \xi$ и удовлетворяет граничным условиям. Излом таков:

$$G_x(\xi - 0, \xi) = G_x(\xi + 0, \xi) + 1.$$

Построим такую функцию и, тем самым, докажем ее существование. Для этого возьмем решения X_1 и X_2 уравнения $AX = 0,\ X_1(0) = X_2(l) = 0$ и положми:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi) X_1(x), \ x \leq \xi \\ C_2(\xi) X_2(x) \ x \geq \xi \end{cases}$$

Условия непрерывности и излома дают:

$$C_1(\xi) X_1(\xi) = C_2(\xi) X_2(x)$$

$$C_1(\xi) X_1'(\xi) = C_2(\xi) X_2(\xi)' + 1$$

Отсюда находим C_1 и C_2:

$$C_1(\xi) = \frac{X_2(\xi)}{W},\ C_2(\xi) = \frac{X_1(\xi)}{W},$$

где $W = X_1' X_2 - X_2' X_1 = \text{ const}$.

Возьмем X_1, X_2 так, что $W = 1$.

Тогда

$$G(x,\xi) = \begin{cases} X_1(x)X_2(\xi), \ x \le \xi \\ X_2(x)X_1\xi, \ x \ge \xi. \end{cases}$$

Докажем равенство: $AX = f$, где

$$X(x) = \int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Представим A в виде

$$A = D_x L, \text{ где}$$

$$LX = -X' + \int_0^x q(y)X(y)dy.$$

Заметим, что

$$g := L_x G(x,\xi) = \begin{cases} a(\xi) \text{ при } x \le \xi \\ b(\xi) \text{ при } x \ge \xi. \end{cases}$$

Действительно,

$$D_x(L_x G(x,\xi)) = 0 \text{ при } x \ne \xi.$$

Следовательно, g постоянно по x при $x \ne \xi$. Далее, функция $L_x G$ терпит скачок в точке ξ, противоположный скачку производной G_x. Следовательно,

$$b(\xi) = a(\xi) + 1.$$

A priori, a и b - константы по x, зависящие от ξ. На самом деле, они постоянны и по x, и по ξ. Действительно,

$$a(\xi) = (L_x G(0,\xi)) = -X_1'(0)X_2(0).$$

Итак,

$$AX = D_x LX = D_x \int_0^l L_x G(x,\xi)f(\xi)s\xi = D_x(a\int_0^l f(\xi)d\xi + \int_0^x f(\xi)d\xi) = D_x(\int_0^x f(\xi)d\xi) = f(x).$$

4 Собственные функции и собственные значения оператора A.

Итак, оператор G, обратный к A - симметричный интегральный оператор. Собственные функции этого оператора образуют полную ортогональную систему, а собственные значения стремятся к нулю. У оператора A собственные функции - те же, а собственные значения - обратные. Это в определенном смысле решает задачу Штурма-Лиувилля.