

ЛИСТОК 2

Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ

1 Покажите, что $Proj(A[x_0, \dots, x_n]) \cong \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{Z}} Spec(A)$, и что если A является k -алгеброй, то $Proj(A[x_0, \dots, x_n]) \cong \mathbb{P}_k^n \times_k Spec(A)$ (в общем случае для S -схем X, Y и Y -схемы Z верно, что $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$).

2 Представьте $\mathbb{P}_A^n \times_{Spec(A)} \mathbb{P}_A^m$ как $Proj(R)$ и вложите его в проективное пространство над A как замкнутую подсхему.

3 Пусть $I \subset A$ - идеал. Определим градуированное кольцо $R = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$, где $I^0 = A$. Раздутие спектра A в I - это $Proj(R)$. Проверьте, что если $A = k[X_0, X_1]$, $I = (X_0, X_1)$, то получается то самое раздутие плоскости в точке. Покажите, что проекция $p : Proj(R) \rightarrow Spec(A)$ - изоморфизм вне $V(I)$.

4 Что получится, если в определении $Proj(k[X_0, X_1, X_2])$ приписать переменной X_0 степень 2 вместо единицы? В какое проективное пространство вкладывается данный $Proj$.

В следующих задачах все происходит над алгебраически замкнутым полем:

5 Покажите, что через 3 попарно не пересекающиеся прямые в \mathbb{P}^3 проходит единственная квадратика. Сколько прямых пересекает 4 попарно не пересекающиеся прямые в \mathbb{P}^3 ?

6 Опишите все прямые на кубической поверхности в \mathbb{P}^3 , заданной в аффинной карте уравнением $xyz = 1$.

7 Пучок прямых в \mathbb{P}^3 - это одномерное семейство прямых в \mathbb{P}^3 , параметризованное прямой \mathbb{P}^1 на квадратике Плюккера (грассманиане $(2,4)$). Покажите, что для любого пучка прямых существует такая точка O и плоскость P в \mathbb{P}^3 , что прямые пучка - это в точности прямые, лежащие в P и проходящие через O .

8 Опишите поверхность в \mathbb{P}^3 , заметаемую касательными прямыми к скрученной кубике.

9 Опишите открытую клетку в грассманиане. Покажите, что она является аффинным пространством, а ее дополнение - неприводимый дивизор. Вычислите группу Пикара Грассманиана. (Показать, что любое нетривиальное линейное расслоение имеет бесконечный порядок в группе Пикара можно с помощью нетривиального ограничения на прямую в Грассманиане).