

7. Вероятность

Рассмотрим эксперимент, имеющий m равновозможных исходов, например бросание игральной кости, вытаскивание карты из колоды и т. д. Если интересующее нас событие (например, выпадение шестёрки, вытаскивание туза и т. д.) происходит в a из этих исходов, то *вероятность* события считают равной $p = a/m$.

Это пояснение полезно для начинающего, но не является математическим определением. Вот математическое определение.

Вероятностью подмножества A конечного множества M называется число

$$P(A) = P_M(A) := |A|/|M|.$$

Далее, если не оговорено противное, множество M фиксировано и пропускается из обозначений. Тогда вероятность определена для всех его подмножеств. Их часто называют *событиями*.

7.1. Из колоды в 52 карты вытаскивается одна карта. Найдите вероятность того, что она окажется: **а)** чёрной масти; **б)** тузом; **в)** картинкой; **г)** дамой пик; **д)** королём или бубной.

Например, в задаче 7.1 в) множество M («всех возможных исходов») совпадает с множеством карт в колоде, а множество A («исходов, в которых происходит рассматриваемое событие») — с множеством картинок. Так эта и многие другие вероятностные задачи могут быть строго сформулированы на комбинаторном языке.

7.2. Монета бросается 3 раза. Найдите вероятность выпадения **а)** трёх орлов; **б)** двух орлов и решки.

7.3. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных костей **а)** на первой выпадет больше очков, чем на второй; **б)** сумма выпавших очков составит 2, 3, ..., 12.

7.4. Найдите вероятность того, что случайное целое число от 1 до 105 **а)** делится на 5; **б)** делится на 7; **в)** делится на 35. **г)** То же для случайного целого числа от 1 до 100.

7.5. Федя знает ответы на 10 вопросов из 30. Билет состоит из двух вопросов. С какой вероятностью Федя ответит на оба вопроса?

Для решения некоторых из вышеприведённых задач полезны следующие.

7.6. а) Правило сложения. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Выразите $P(A \cup B)$ через $P(A)$ и $P(B)$.

б) Выразите вероятность $P(A \cup B)$ через $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$.

в) Правило умножения. Выразите вероятность $P_{M \times N}(A \times B)$ через $P_M(A)$ и $P_N(B)$.

Комментарий: $P_M(A) = P_{M \times N}(A \times N)$ и $P_N(B) = P_{M \times N}(M \times B)$.

- 7.7. а)** В ящике лежат красные и чёрные носки. Какое минимальное количество носков может быть в ящике, если вероятность того, что два случайно вытянутых носка красные, равна $1/2$?
- б)** То же, если дополнительно известно, что число чёрных носков чётно.
- 7.8. а)** С какой вероятностью треугольник, образованный тремя случайными вершинами правильного $2n$ -угольника, будет прямоугольным; остроугольным; тупоугольным?
- (Если эта задача не получается, то см. следующий пункт.)
- б)** Найдите пределы полученных вероятностей при $n \rightarrow \infty$.