

6. Перестановки. Формула включений и исключений

6.1. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{2017}.$

6.2. Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся:

а) ни на 2, ни на 3;

б) ни на 2, ни на 3, ни на 5?

6.3. Сколько чисел от 1 до 100000 не являются ни квадратами, ни кубами, ни пятыми степенями натуральных чисел?

6.4. а) Чему могут быть равны порядки элементов в группе перестановок S_{11} ?

б) Найдите число перестановок из S_{11} порядка 10.

6.5. Будем говорить, что подстановка $\sigma \in S_n$ имеет *спуск* в элементе $k < n$, если $\sigma(k) > \sigma(k+1)$. Найдите число перестановок с единственным спуском в элементе k (они называются *грассмановыми*).

6.6. Рассеянная секретарша раскладывает n писем по n подписанным конвертам, не глядя на адреса. Найдите вероятность того, что каждый из адресатов получит чужое письмо. (УКАЗАНИЕ. Начните с $n = 2, 3, 4, \dots$)

6.7. Докажите, что при $m < n$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0.$$