Листок 3. Задача Лагранжа, принцип максимума, условия второго порядка

Вар исч., 3-4 курс, **12.04.2017**

3◇1 **а)** Исследуйте на экстремум функцию $u = x^m y^n z^p$, если $x + y + x = a$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $a > 0$).
б) Докажите неравенство для средних степней

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < p \leqslant q \leqslant \infty.$$

3◇2 Решите задачу Лагранжа

$$\int_0^1 u^2 dt \to \mathrm{extr}, \quad \ddot{x} - x = u, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

3◇3 Решите задачу оптимального управления:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin t dt \to \mathrm{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(-\pi) = x(\pi) = 0.$$

3◇4 Сильный и слабый экстремум. Напомним, что сильным называется локальный экстремум по норме $C([t_1, t_2])$, а слабым — локальный экстремум по норме $C^1([t_1, t_2])$. Докажите, что решение уравнения Эйлера дает слабый, но не сильный экстремум в задаче

$$\int_0^1 \dot{x}^3 dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

3◇5 С помощью условий Лежандра, Якоби и Вейерштрасса исследовать задачи на сильный и слабый экстремум
а) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x) dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(\frac{3\pi}{2}) = 0;$
б) $\int_0^1 \sin \dot{x} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1;$
в) $\int_0^{T_0} \dot{x} e^{\dot{x}} dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi.$
г) Как устроены пары сопряженных точек для геодезических на сфере?

3◇6 Улитка хочет за 3 часа оползти максимальную площадь и вернуться в начальную точку. При этом вектор скорости улитки может принимать значения только внутри или на границе равностороннего треугольника с центром в нуле и стороной 2. По какой траектории должна двигаться улитка? Какова площадь фигуры, ограниченной этой траекторией?