

Группы и алгебры Ли II. Семинар 12.04.17

Задача 1. Опишите в терминах линейной алгебры разложения Картана для групп $GL(n, \mathbb{R})$ и $GL(n, \mathbb{C})$

Задача 2. а) Для вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(p, q)$ определите: ее комплексификацию; вещественную инволюцию, ее выделяющую, автоморфизм Картана \mathfrak{g} и $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, разложение Картана. Те же вопросы про группу $SU(p, q)$

б) Опишите векторную подалгебру Картана \mathfrak{a} вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(1, n)$, систему ограниченных корней и разложение Ивасава алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(1, n)$ и группы Ли $SU(1, n)$

в) те же вопросы для алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(p, q)$ и группы Ли $SU(p, q)$

Задача 3. Пусть \mathfrak{g} - (полу)простая) комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ - ее комплексификация.

а) Покажите, что $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ как вещественная алгебра Ли.

б) с другой стороны, алгебру \mathfrak{g} можно определить как вещественную форму комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ с комплексной структурой J , где $J(g_1, g_2) = (-ig_1, ig_2)$ относительно антилинейной инволюции σ , где $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$, а компактная форма выделена антилинейной инволюцией τ , где $\tau(g_1, g_2) = (-\bar{g}_1^t, -\bar{g}_2^t)$

Задача 4. Пусть \mathfrak{g} - простая вещественная алгебра Ли. Тогда ее комплексификация $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ - либо простая комплексная алгебра Ли, либо прямая сумма двух изоморфных простых комплексных алгебр Ли

Задача 5. Еще одна вещественная форма группы комплексных унитарных матриц $SU^*(2n) = SL(n, \mathbb{H})$ определяется как подгруппа группы $SL(2n, \mathbb{C})$, состоящая из ее элементов, коммутирующих с преобразованием J , где

$$J(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n}) = (\bar{z}_{n+1}, \dots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_n)$$

Покажите, что группа и ее алгебра Ли описываются блочными матрицами $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ с условиями на детерминант и след соответственно. Опишите комплексификацию алгебры Ли, вещественную инволюцию, максимальную компактную подгруппу, векторную подалгебру Картана и корневое разложение.