Лекция 12.04.17

Полупростые вещественные алгебры Ли.

Напомним, что: алгебра Ли $\mathbf{g}$ над полем характеристики 0 называется полупростой, если ее радикал (максимальный разрешимый идеал) нулевой. Эквивалентно: форма Киллинга $B(x,y) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y$ невырождена. Всякая полупростая алгебра Ли есть прямая сумма простых. Редуктивная алгебра Ли $\mathbf{g}$ - это прямая сумма полупростой и центра $\mathbf{g}$. Эквивалентно, алгебра Ли $\mathbf{g}$ редуктивна, если ее присоединенное представление полупросто.

Для вской вещественной агебры Ли $\mathbf{g}$ ее комплексификация $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ - это следующая алгебра Ли над $\mathbb{C}$: как векторное пространство $\mathbf{g}_{\mathbb{C}} = \mathbf{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, т.е., $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ состоит из элементов вида $x + iy$, $x, y \in \mathbf{g}$. Коммутатор линейно продолжается с $\mathbf{g}$, т.е.,

$$[x_1 + iy_1, x_2 + iy_2] = [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + i([x_1, y_2] + [x_2, y_1])$$

Исходная алгебра $\mathbf{g}$ выделяется в $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ в качестве неподвижных точек антилинейной инволюции σ, (со свойствами $\sigma^2 = 1$, $\sigma([x,y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$, $\sigma(\lambda x) = \bar{\lambda}\sigma(x)$):

$$\sigma(x + iy) = x - iy$$

и называется вещественной формой $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$. Алгебра Ли $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ может быть рассмотрена и как вещественная алгебра Ли. Комплексная структура восстанавливается по вещественно-линейному оператору J (умножение на i) со свойствами $J^2 = -1$, $J([x,y]) = [x, J(y)]$. Нетрудно понять, что комплексификая полупростой (редуктивной) вещественной алгебры Ли полупроста (редуктивна). Таким образом, описание полупростых вещественных алгебр Ли - это описание вещественых форм полупростых комплексных алгебр Ли. Однако, описание простых алгебр Ли над $\mathbb{R}$ не сводится к описанию вещественных форм простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$. Причина: комплексификация комплексной алгебры Ли $\mathbf{g}$, рассматриваемой как вещественная алгебра Ли, изоморфна $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$ - см. задачи семинара и пример 2.

Каждая полупростая алгебра Ли $\bar{\mathbf{g}}$ над $\mathbb{C}$ имеет две выделенные вещественные формы - расщепимую и компактную. Соответствующие антилинейные инволюции τ_s и τ_c достаточно описать на образующих Шевалле h_i, e_i, f_i; - далее продолжаются по антилинейности и гомоморфности.

$$\begin{aligned} &\tau_s(h_i) = h_i, \qquad \tau_s(e_i) = e_i, \qquad \tau_s(f_i) = f_i, \\ &\tau_c(h_i) = -h_i, \qquad \tau_c(e_i) = -f_i, \qquad \tau_c(f_i) = -e_i, \end{aligned}$$

В базисе Картана-Вейля расщепимая форма $\bar{\mathbf{g}}$ состоит из линенйных комбинаций с вещественными коэфициентами векторов e_α и h_α, а компактная - из линейных комбинаций с вещественными коэффициентами векторов ih_α, $(e_\alpha - e_{-\alpha})$ и $i(e_\alpha + e_{-\alpha})$. Например, расщепимая форма алгебры $sl(n, \mathbb{C})$ - это $sl(n, \mathbb{R})$, а компактная - алгебра Ли $\mathbf{u}(n)$ группы унитарных матриц. В общем случае несложно вычислить форму Киллинга на неподвижных точках инволюции τ_c и убедиться. что она отрицательно определена, а это - характеристическое свойство компактных полупростых групп Ли. В самом деле, если группа компактна, то для присоединенного представления (а оно имеет вещественные коэффициенты) можно взять произвольную положительно определенную вещественную форму и усреднить по группе. Получим инвариантную положительно определенную форму на алгебре Ли. В ней в ортонормированном базисе операторы $\mathrm{ad}\,x$ представлены кососимметрическими матрицами a_{ij}, значит, след

ad^2x равен

$$\sum_{ij} a_{ij}a_{ji} = -\sum_{i<j} a_{ij}^2$$

Учитывая невырожденность формы (из полупростоты), получаем отрицательную определенность. С другой стороны, если форма Киллинга $B(x, y)$ отрицательно определена, то форма $-B(x, y)$ также инвариантна и положительно определена. В ней алгебра Ли действует кососимметрическими матрицами, а значит, *присоединенная* группа, состоящая из от операторов $\exp \operatorname{ad} x$, состоит из ортогональных матриц и потому компактна. Ее , или ее расширение с помощью конечной группы, можно выбрать в качестве соответствующей полупростой компактной группы с заданной алгеброй Ли.

Конструктивное описание и классификация простых вещественных групп основана на следующей теореме

Теорема Пусть $\bar{\mathbf{g}}$ - полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathbf{g}$ - ее вещественная форма, выделяемая антилинейной инволюцией σ, $\mathbf{u}$ - компактная форма, выделяемая инволюцией τ. Тога существует комплексно линейный автоморфизм φ алгебры $\bar{\mathbf{g}}$, такой, что вещественная компактная форма $\varphi(\mathbf{u})$ инвариантна относительно σ.

Переформулировки: а) любая вещественная форма $\bar{\mathbf{g}}$ сопряжена вещественной форме, согласованной с заданной компактной формой;
б) инволюции σ и τ могут быть выбранными коммутирующими. В частности, задача классификации вещественных форм сводится к задаче классификации линейых инволютивных автоморфизмов $\theta = \tau\sigma$ алгебры Ли $\bar{\mathbf{g}}$, коммутирующих с антилинейной инволюцией τ_c

Доказательство. Пусть $B(\, , \,)$ - (комплекснозначная) форма Киллинга на $\bar{\mathbf{g}}$. Тогда $B_\tau(x, y) = -B(x, \tau(y))$ - эрмитова положительно определенная форма на $\bar{\mathbf{g}}$. Действительно, для всякого $x \in \mathbf{u}$

$$B_\tau(x, x) = -B(x, \tau(x)) = -B(x, x) > 0$$

поскольку $\mathbf{u}$ компактна. Положим $N = \sigma\tau$. Тогда линейный оператор N самосопряжен относительно этой формы:

$$B_\tau(Nx, y) = -B(\sigma\tau x, \tau y) = -B(\sigma^2\tau x, \sigma\tau y) = -B(\tau x, \sigma\tau y) =$$
$$-B(\tau^2 x, \tau\sigma\tau y) = -B(x, \tau\sigma\tau y) = B_\tau(x, Ny)$$

Здесь использовано то, что σ и τ - автоморфизмы. Значит, N диагонализуем с вещественными ненулевыми собственными значениями. Положим $P = N^2$. У линейного оператора P собственные значения положительны, и потому определен оператор P^t для любого вещественного t. Поскольку $\tau N \tau^{-1} = \tau\sigma\tau\tau = \tau\sigma = N^{-1}$, то же равенство верно для P и его степеней,

$$\tau P^t \tau^{-1} = P^{-t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau P^t = P^{-t}$$

Положим $\varphi = P^{1/4}$. Тогда $\tau_1 = P^{1/4}\tau P^{-1/4}$.

$$\sigma\tau_1 = \sigma P^{1/4}\tau P^{-1/4} = \sigma\tau P^{-1/2} = NP^{-1/2},$$
$$\tau_1\sigma = P^{1/4}\tau P^{-1/4}P^{1/2}\tau\sigma = P^{1/2}N^{-1}$$

Оба оператора $NP^{-1/2}$ и $P^{1/2}N^{-1}$ диагональны в собственном базисе N и имеют собственные значения ± 1 в зависимости от знака собственного значения N и потому совпадают. $\square$

Теперь всюду мы предполагаем, что инволюции σ и τ коммутируют. Тогда $\theta = \sigma\tau$ - линейный инволютивный автоморфизм $\bar{\mathbf{g}}$, сохраняющий вещественную форму $\mathbf{g}$. Он называется инволюцией Картана. Пусть

$$\mathbf{k} = \{x \in \mathbf{g} | \theta(x) = x\}, \qquad \mathbf{p} = \{x \in \mathbf{g} | \theta(x) = -x\}$$

Тогда

$$\mathbf{g} = \mathbf{k} \oplus \mathbf{p}, \qquad [\mathbf{k}, \mathbf{k}] \subset \mathbf{k}, \qquad [\mathbf{k}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{p}, \qquad [\mathbf{p}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{k}$$

Рассмотрим вещественнозначную симметричную форму на $\mathbf{g}$:

$$B_\theta(x, y) = -B(x, \theta y)$$

Теорема а) Форма B_θ положительно определена

б) операторы ad_z кососиметричны для $z \in \mathbf{k}$ и симметричны для $z \in \mathbf{p}$. Доказательство пункта а) содержится в доказательстве предыдущей, основной теоремы. Пункт б). Пусть, например, $z \in \mathbf{p}$. Тогда

$$B_\theta(\mathrm{ad}_z\, x, y) = -B([z, x], \theta y) = -B(\theta([z, x], y) = B([z, \theta x], y) = -B(\theta x, [z, y]) = B_\theta(x, \mathrm{ad}_z\, y)$$

Как следствие, получаем:

1) Все операторы ad_x, $x \in \mathbf{p}$ полупросты с вещественными собственными значениями и все собственные векторы лежат в вещественном пространстве $\mathbf{g}$

2) подалгебра $\mathbf{k}$ - максимальная компактная в $\mathbf{g}$

3) билинейная форма B_θ определяет на вещественной группе G левоинвариантную риманову метрику (при помощи правых сдвигов), которая в силу первой части пункта б) теоремы спускается на однородное пространство G/K

Всякую максимальную абелеву подалгебру $\mathbf{a}$ в $\mathbf{p}$ називем (векторной, или расщепимой) картановской подалгеброй вещественной алгебры Ли $\mathbf{g}$. В силу 1) имеет место корневое разложение

$$\mathbf{g} = \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathbf{g}_\alpha, \qquad [a, x] = \alpha(a)x \qquad \forall x \in \mathbf{g}_\alpha$$

Векторы $\alpha \in \mathbf{a}^*$ образуют т.н. ограниченную систему корней. В отличие от системы корней комплексной алгебры Ли, эта система корней неприведенная, т.е., вместе с корнем α в систему корней может входить и корень 2α. Кроме того, корневые пространства неодномерны ("корни имеют кратности").

Примеры **1**. Алгебра Ли $\mathbf{g} = sl(n, \mathbb{R})$. Комплексификация $\bar{\mathbf{g}} = sl(n, \mathbb{C})$. Выделяется инволюцией $\sigma(g) = \bar{g}$. Компактная инволюция стандартная: $\tau(g) = -g^* = -\bar{g}^t$. Инволюция Картана: $\theta(g) = \sigma\tau(g) = -g^t$. Картановское разложение состоит в разложении матрицы в сумму кососимметричной и симметричной

$$\mathbf{k} : g^t = -g, \qquad \mathbf{p} : g^t = g$$

На групповом уровне разложению Картана соответствует полярное разложение вещественной матрицы в произведение ортогональной и симметричной положительно определенной. В качестве векторной картановской подалгебры $\mathbf{a} \subset \mathbf{p}$ можно выбрать подалгебру диагональных матриц. Корневое разложение будет иметь тип A_{n-1}, корневые подпространства для ненулевых корней одномерны и порождены матричными единицами E_{ij}.

2. Алгебра Ли $\mathbf{g} = sl(n, \mathbb{C})$. Комплексификация изоморфна $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$, с комплексной структурой $J = (i, -i)$ (т.е., умножение на i в первом сомножителе и на $-i$ во втором), в которой $\mathbf{g}$ выделяется как диагональ - неподвижная точка инволюции $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$. Компактная инволюция $\tau(g_1, g_2) = (-g_1^*, -g_2^*)$. Картановский автоморфизм

$$\theta(g_1, g_2) = (-g_2^*, -g_1^*)$$

Ограничение θ на $\mathbf{g}$ после отождествления $\mathbf{g}$ с диагональю в $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$ переводит матрицу g в $-g^*$. Таким образом, картановское разложение состоит в разложении комплексной матрицы в сумму антиэрмитовой и эрмитовой:

$$\mathbf{k} : g^* = -g, \qquad \mathbf{p} : g^* = g$$

На групповом уровне этому также соответствует полярное разложение комплексной матрицы в произведение унитарноц и эрмитовой положительно определенной. Векторная картановская подалгебра $\mathbf{a} \subset \mathbf{p}$ та же, что и в $sl(n, \mathbb{R})$. Неизменная и система корней, только теперь каждый ненулевой корень имеет кратность 2 с корневыми векторами E_{ij} и iE_{ij}.

3. Алгебра Ли $\mathbf{g} = su(1, n-1)$. Состоит из матриц g, таких, что $g^*I + Ig = 0$, где I - диагональная матрица с -1 в левом верхнем углу, $I = -E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{n,n}$. Комплексификация изоморфна $sl(n, \mathbb{C})$. Инволюция τ стандартная. Инволюция σ: $\sigma(g) = -I^{-1}g^*I$, так что инволюция Картана

$$\theta(g) = I^{-1}gI.$$

Разложение Картана представляет матрицу из $\mathbf{g} = su(1, n-1)$ в виде суммы блочно-диагональной из $\mathbf{k} = s(u(1) \oplus u(n-1))$ и матрицы из $\mathbf{p}$ с ненулевыми внедиагональными блоками размеров $1 \times (n-1)$ и $(n-1) \times 1$. Максимальная коммутативная подалгебра $\mathbf{a}$ в $\mathbf{p}$ одномерна. В ее качестве можно взять подпространство, натянутое на $E_{1n} + E_{n1}$. Корневые векторы для ненулевых корней:

$$(E_{1i} + E_{i1}) \pm (E_{n1} - E_{in}), \qquad i(E_{1i} - E_{i1}) \pm i(E_{n1} + E_{in}), \qquad i(E_{1n} - E_{n1}) \pm i(E_{11} - E_{nn})$$

Система корней:

$$\begin{array}{ccccccccc}
-2\alpha & & -\alpha & & 0 & & \alpha & & 2\alpha \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
1 & & 2(n-2) & & (n-2)^2+1 & & 2(n-2) & & 1
\end{array}$$

Сверху обозначены корни, снизу - их кратности. Система корней неприведенная.[1]

Литература

1. С.Хелгасон, Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства, гл. III

2. Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, глава 5.

[1]На семинаре кратности корней были выписаны неверно: $n-2$ вместо $2(n-2)$