Группы и алгебры Ли II. Задачи по второй части курса (март-апрель 2017)

Эта часть курса автоматически зачитывается тем, кто посетил большую часть занятий и семинаров. Для зачета можно также сдать письменно одну из предложенных ниже задач. Часть из них предлагалась (но не разбиралась) на семинарах

Задача 1. Представления основной серии вещественной группы $SL(2,\mathbb{C})$ определяются как индуцированные с неприводимых представлений подгруппы верхнетреугольных матриц.

а) Опишите эти представления в терминах функций на группе (как индуцированные). Какими параметрами они задаются?

б) опишите явно некомпактную реализацию представлений

в) какие представления двойственны и какие образуют основную унитарную серию?

г)* опишите компактную реализацию и спектр (ограничение представления на максимальную компактную подгруппу)

Задача 2. Представления основной серии полупростой вещественной группы G определяются как индуцированные с (конечномерных) неприводимых представлений максимальной параболической подгруппы P. Подгруппа P может быть описана следующим образом: пусть $G = KAN$ разложение Ивасава G, где K - максимальная компактная, $A = \exp \mathbf{a}$ - коммутативная векторная, N- нильпотентная. Тогда

$$P = MAN,$$

где M - централизатор A в K.

а) Опишите представления основной серии групп $SL(n,\mathbb{R})$ и $SL(2,\mathbb{C})$. Какими параметрами они задаются?

б) опишите представления основной серии группы $SU(1,n)$

в) опишите спектр (ограничение на максимальную компактную подгруппу) представления основной серии группы $SU(1,n)$

Задача 3. а) Покажите, что, помимо основной унитарной серии $D_{i\rho,\varepsilon}$, инвариантной унитарной структурой обладают также представления <u>дополнительной</u> серии $D_{s,0}$, где s - действительное число, $-1 < s < 1$;

б) этим исчерпывается список унитарных представлений основной серии $SL(2,\mathbb{R})$

в)* скалярное произведение в представлениях дополнительной серии может быть определено формулой

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1 - x_2|^{-s-1} f(x_1)\bar{f}(x_2) dx_1 dx_2$$

которая при $s > 0$ понимается в смысле аналитического продолжения с области $s < 0$.

Задача 4. В реализации индуцированного представления (т.е., в виде функций на группе, таких, что $f(pg) = \chi(p)f(g)$ для всякой верхнетреугольной матрицы $p =$

$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ где $\chi(p) = |\lambda|^{s-1} \operatorname{sgn}^{\varepsilon} \lambda$ сплетающий оператор $A_\chi : D_\chi \to D_{-\chi}$ между представлениями основной серии группы $SL(2,\mathbb{R})$ может быть записан в виде аналитического продолжения интеграла

$$A_\chi f(g) = \int_N f(nwg)dn, \qquad \text{где} \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

а N - подгруппа верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали.

а) Проверьте, исходя из определения (1), сплетающее свойство оператора A_χ

б) покажите, что этот оператор совпадает с описанным в лекции 2

в)* Представление D_χ основной серии группы $SL(3,\mathbb{R})$ точно также определяется как индуцированное с одномерного представления подгруппы верхнетреугольных матриц (и нумеруется двумя комплексными числами и двумя знаками). По каждому элементу группы Вейля S_3 постройте сплетающий оператор между представлениями основной серии

Задача 5. Вещественная форма $SU^*(2n) = SL(n,\mathbb{H})$ группы комплексных унимодулярных матриц определяется как подгруппа группы $SL(2n,\mathbb{C})$, состоящая из ее элементов, коммутирующих с преобразованием J, где

$$J(z_1, ...z_n, z_{n+1}, ..., z_{2n}) = (\bar{z}_{n+1}, ..., \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, ..., -\bar{z}_n)$$

а) Покажите, что группа и ее алгебра Ли описываются блочными матрицами $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ с условиями на детерминант и след соответственно. Опишите комплексификацию алгебры Ли, вещественную инволюцию, максимальную компактную подгруппу, векторную подалгебру Картана и корневое разложение.

б)* опишите геометрически симметрическое пространство G/K

Задача 6. Покажите, что:

а) пространство комплексных структур в $\mathbb{R}^{2m}$

б) пространство вещественных структур в $\mathbb{C}^m$

в) пространство кватернионных структур в $\mathbb{C}^{2m}$

являются симметрическими пространствами. Каковы их группы изометрий?

г)* опишите двойственные симметрические пространства