

# Лагранжева механика 3 (2016/2017)

В.А. Побережный

## 1 О ньютоновской гравитации

Итак, как показали проделанные нами явные вычисления, предсказываемое ньютоновым законом всемирного тяготения движение планет вокруг солнца вполне соответствует наблюдаемой нами в реальной жизни картине динамики солнечной системы. Конечно, речь идёт о некотором разумном приближении, ведь хорошо известно, что начиная с некоторого уровня точности в движении небесных тел становятся существенно заметны релятивистские эффекты, объясняемые уже в рамках теории относительности, а не классической механики. Например, современная точность приборов GPS-локации уже недостижима без учёта релятивистских поправок в движении спутников обеспечивающих позиционирование.

В проведённых расчётах мы рассматривали небесные тела как материальные точки, в которых были полностью сосредоточены соответствующие им массы. Вполне естественно задаться вопросом, насколько сильно повлияло это наше упрощение на окончательный результат. Соответствуют ли ему какие-то малые поправки в ответе (то есть у нас получился ответ похожий на реальность только потому, что планеты маленькие, а орбиты большие), или это строгий переход и точное равенство? А может быть, такое предположение вовсе некорректно, и совпадение случайно? Какие вообще результаты даёт закон всемирного тяготения, сформулированный изначально для двух материальных точек, в случае, когда один из взаимодействующих объектов состоит не из одной, а из нескольких точек, или же является пространственным массивным телом?

Конечно же ответы на все эти вопросы можно получить совершенно не задумываясь, прямым вычислением соответствующих сумм (для конечных наборов точек) и интегралов (для непрерывных объёмов). Более-менее этим мы и займёмся, но попутно постараемся обращать внимание на некоторые интересные для общей картины детали. Говоря неформально, например, хотелось бы проследить соответствие рассматриваемой теории гравитации нашим интуитивным представлениям, опыту “реальной жизни”. Так, гипотеза о том, что однородный массивный шар создаёт точно такую же притягивающую силу что и материальная точка равной массы, помещённая в центр шара, кажется скорее “разумной и правдоподобной” чем “удивительной и фантастической”. Кроме того, постараемся обращать внимание на то, где именно становится критически важным то, что в законе всемирного тяготения сила пропорциональна именно обратному квадрату расстояния, а не какой-либо другой его степени, казалось бы, чем этот случай так уж выделен.

Всего мы рассмотрим три модели. Это будут притяжение пары закреплённых точек, притяжение однородного массивного шара и притяжение однородного шарового слоя (шара, из которого вырезан концентрический шар меньшего радиуса). Отдельно рассмотрим интересный и содержательный вопрос как притягивают шар и шаровой слой материальную точку когда она находится у них внутри.

## 1.1 Переход от силы к потенциалу

Как уже было объявлено, в принципе, все поставленные нами вопросы могут быть решены просто по определению, прямым интегрированием в лоб. Однако, даже в нашем трёхмерном мире, (три это немного и несложно) при довольно простом законе притяжения совсем уж наивный счёт интегралов потребует весьма существенного времени и объёма вычислений. Безусловно, эта работа вполне может быть проделана за конечное время, но мы постараемся, где только это будет возможно, всячески облегчать свою задачу пользуясь наиболее удобными координатами, переменными, итд. Первым шагом на этом пути будет переход от вычисления сил к вычислению потенциалов. Напомним, что потенциалом поля  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  называется (если она существует) такая функция  $U(\mathbf{x})$ , что её градиент  $\nabla U$  равен  $-\mathbf{F}$ . Как мы проверяли, для двух материальных точек масс  $m_0$  и  $m_1$  разделённых вектором  $\mathbf{x}$  закон Ньютона даёт

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= -G \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{e}_x = -G \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \\ U(\mathbf{x}) &= -G \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{x}|}\end{aligned}$$

Как и ранее жирный шрифт используется для векторных величин.

Почему стоит переходить от силы к потенциалу? Потому что это удобно – сила величина векторная, суммируя или интегрируя её приходится считать проекции на координатные оси, кроме того, компоненты вектора силы будучи частными производными не очень уж просто ведут себя при заменах координат, что также затрудняет счёт интегралов. Ну и наконец, в потенциал расстояние входит в минус первой степени, а силу в минус второй, можно надеяться, что и нужные нам подынтегральные выражения будет в этом случае попроще.

Почему можно переходить от силы к потенциалу? Потому что потенциал как и силы аддитивен, и при этом однозначно задаёт силу. Если нашу тестовую материальную точку притягивают какие-либо два объекта (неважно, тела или материальные точки)  $A$  и  $B$  с силами  $\mathbf{F}_A = -\nabla U_A$  и  $\mathbf{F}_B = -\nabla U_B$  то вместе они тянут эту точку с силой  $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$  которая конечно же равна  $-\nabla U_A - \nabla U_B = -\nabla(U_A + U_B)$ . Таким образом, потенциал хорошо себя ведёт при суммировании или интегрировании по точкам тела и в дальнейшем вместо изучения сил мы будем вычислять и сравнивать гравитационные потенциалы различных моделей.

## 1.2 Гравитационный потенциал пары точек

Первая простейшая модель это конечный набор точек, например, две точки равной массы. Какие могли бы быть “наивные” предположения о том как устроено их гравитационное поле? Ну можно рассмотреть их центр масс,

каких-то других очевидных вариантов для пары точек сразу так не видно. И так, правда ли что пара материальных точек притягивает тестовую точку точно так же как это делает центр масс этой пары? Тут конечно и в терминах потенциалов и в терминах сил формальные вычисления совершенно устные и проводятся элементарно, но давайте попробуем ответ сначала просто увидеть рассматривая ряд простейших конфигураций в этой модели.

Итак, первый подход: пусть наши две точки находятся вблизи начала координат, а третья точка, тестовая, от них очень далеко. Тут, на первый взгляд всё более-менее нормально. Центр масс лежит тоже где-то близко к началу координат, все три радиус-вектора примерно равны друг другу, и сумма двух крайних в принципе может быть равна удвоенному (в центре масс масса в два раза больше) среднему вектору. Ладно, смотрим дальше.

Второй подход: пусть теперь все три точки лежат на одной прямой, тестовая в начале координат, а две другие на равных от неё расстояниях. В этом случае сумма сил очевидно равна нулю. При этом, тестовая точка лежит как раз в центре масс. Как трактовать ньютонов закон гравитации при  $r = 0$  не очень понятно, но уже можно заметить, что у него в нуле сила “бесконечная”, а у нас тут вроде бы наоборот, нулевая. Уже подозрительно. Попробуем перерасположить точки.

Третий подход: опять три точки на прямой, две на равном расстоянии от нуля, а тестовая между ними, вблизи, например, левой точки. Притяжение левой точки обратно пропорционально квадрату расстояния и поэтому очень велико, много сильнее притяжения правой. То есть сумма действующих сил тянет тестовую точку налево. Ну а центр масс лежит в начале координат, то есть справа. То есть, об эквивалентности притяжений речи уже быть не может.

Приведём и формальное строгое вычисление. Для первой точки  $U_1(\mathbf{x}) = -Gm_0m/|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|$  для второй  $U_2(\mathbf{x}) = -Gm_0m/|\mathbf{x} - \mathbf{r}_2|$ , для центра масс  $U_*(\mathbf{x}) = -Gm_02m/|\mathbf{x} - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2|$ . Очевидно теперь, что при произвольном положении точек  $U_* \neq U_1 + U_2$ . Потенциалы, а значит и силы, не равны.

Последнее замечание. Некоторое интуитивное соображение о том почему центр масс не может давать здесь правильного ответа. По своему устройству центр масс это конструкция “линейная”, для набора точек равной массы она зависит от их положений “линейно”. В то же время потенциалы обратны расстояниям до точек. Предположение о том, обратная к линейной комбинации величина может быть эквивалентна линейной комбинации обратных величин выглядит совершенно нереально.

Итог: ничего особенно хорошего о поле гравитации пары точек сказать нельзя.

### 1.3 Гравитационный потенциал шара

Предположение о гравитационном поле шара мы уже упоминали. Верно ли, что гравитационный потенциал шара равен потенциалу материальной точки той же массы, находящейся в центре шара. Потенциалы сравниваются для точек, находящихся снаружи шара, внутренность будет рассмотрена отдельно. Шар мы предполагаем имеющим постоянную плотность, а центр его расположенным в начале координат. Как вычислить потенциал шара? Надо взять сумму по всем элементам массы составляющим шар. Что такое элемент массы? Это просто элемент объёма умноженный на плотность

шара, в наших предположениях постоянную.

$$U(\mathbf{x}) = \int_{B_R} -G \frac{m_0 dm}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} = \int_{B_R} -G \frac{m_0 \mu dV}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} = -G m_0 \mu \int_{B_R} \frac{dV}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}$$

где  $B_R$  это собственно шар радиуса  $R$  с центром в нуле, а  $\mathbf{r}$  радиус-вектор элемента объёма  $dV$  внутри шара. Самый прямой, и поэтому наиболее длинный и трудоёмкий путь это немедленно начать вычислять написанный интеграл в обычных декартовых координатах. Пусть наша тестовая точка лежит на оси  $O_x$  на расстоянии  $x_0$  от начала координат тогда

$$U(\mathbf{x}) = -G m_0 \mu \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-R}^R \frac{dxdydz}{\sqrt{(x_0-x)^2+y^2+z^2}}$$

Элемент объёма имеет в них самый простой вид  $dV = dxdydz$ , подынтегральная функция не очень приятная, но и не сильно сложная, зато пределы интегрирования будут довольно ужасны, прямые вычисления выйдут весьма громоздкими. Попробуем поупростать.

Раз уж у нас интеграл по шару, то можно попробовать перейти к сферическим координатам. Напоминаем:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \\ dV &= r^2 \sin \theta \cdot dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

Получаем

$$U(\mathbf{x}) = -G m_0 \mu \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{x_0^2 + r^2 - 2rx_0 \sin \theta \cos \varphi}}$$

Далее, для удобства будем вместо  $x_0$  использовать обозначение  $x$ , так как координаты сферические это уже не приведёт к путанице с переменными интегрирования. Пределы интегрирования стали получше, но выражение под интегралом как-то не очень кажется хорошим. Вполне понятно, всё-таки декартовы и сферические координаты оптимизированы под другие типы задач и пространственных конфигураций. Посмотрим внимательнее на нашу модель. У нас в ней имеется выделенное специальное направление – прямая, проходящая через центр шара и тестовую точку. Мы поместили эту прямую на ось  $O_x$  поскольку действовали в декартовой системе, а там все оси “одинаковые”. Там же мы её оставили и после перехода к сферическим координатам. Но ведь в ней уже оси “неравноправны”! По своему смыслу, да и по явным формулам перехода в сферических координатах “наиболее фундаментальной” является ось  $O_z$ . Так что стоит попробовать поместить тестовую точку на ось  $O_z$ , пусть на том же самом расстоянии  $x$ . Получаем:

$$U(\mathbf{x}) = -G m_0 \mu \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2rx \cos \theta}}$$

Действительно стало получше. Осталось сделать последний, может быть наименее очевидный шаг. Заметить следует вот что:

$$\frac{d}{d\theta} \sqrt{x^2 + r^2 - 2rx \cos \theta} = \frac{xr \sin \theta}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2rx \cos \theta}}$$

Если обратить на это внимание, то дальнейшие действия вполне ясны. Следует от сферических координат  $(r, \varphi, \theta)$  перейти к новым координатам  $(r, \varphi, \rho)$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + r^2 - 2rx \cos \theta}$ , ведь по предыдущему равенству подынтегральное выражение практически равно  $d\rho$ .

$$U(\mathbf{x}) = -Gm_0\mu \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{x-r}^{x+r} d\rho \frac{r}{x}$$

Ну а уж такой интеграл мы конечно уже можем легко взять:

$$U(\mathbf{x}) = -G \frac{m_0\mu 2\pi}{x} \int_0^R 2r^2 dr = -G \frac{m_0 \frac{4\pi R^3 \mu}{3}}{x} = -G \frac{m_0 M}{x}$$

где  $M$  масса однородного шара радиуса  $R$ . То есть потенциал шара действительно равен потенциалу материальной точки массы  $M$  расположенной в начале координат. То есть тут, в отличие от рассмотренного ранее абстрактного набора равновесных точек нам вполне позволяет считать всю массу сосредоточенной в центре масс. Из проделанного нами явного вычисления немедленно следует, что ни для какой другой степенной зависимости гравитационной силы от расстояния помимо обратно-квадратичной это свойство выполняться не будет! **То есть требование эквивалентности потенциалов однородного шара и его центра масс однозначно задаёт показатели степенной зависимости силы и потенциала от расстояния.** Конечно же это связано с тем, что масса в нашем шаре распределена “очень” симметрично и все наши расчёты существенно трёхмерны. Последнее замечание – все полученные результаты остаются справедливыми и для шаров непостоянной плотности если эта плотность зависит только от радиуса, то есть сферически-симметрична  $\mu(x, y, z) = \mu(r)$ . А это уже даёт вполне хорошее приближение для звёзд и для планет солнечной системы, то есть их при расчётах в рамках ньютоновской гравитации действительно можно корректно представлять материальными точками.

## 1.4 Гравитационный потенциал шарового слоя

Гравитационный потенциал снаружи шарового слоя или “сферы заданной толщины и плотности” моментально получается из результата предыдущего раздела для шара если воспользоваться принципом суперпозиции – гравитационный потенциал “набора” точек равен сумме или интегралу гравитационных потенциалов по всем точкам.

Если мы “добавим” к однородному шаровому слою массы  $m_1$  однородный шар той же плотности с массой  $m_2$  заполняющий пузырь внутри нашего слоя, то мы получим однородный шар массы  $m_1 + m_2$ . Следовательно, потенциал шарового слоя равен разности потенциалов большого и малого шаров, а эти функции мы уже знаем:

$$U(\mathbf{x}) = -G \frac{m_0(m_2 + m_1)}{|\mathbf{x}|} + G \frac{m_0 m_2}{|\mathbf{x}|} = -G \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{x}|}$$

то есть в этом случае потенциал снова ведёт себя так, как если бы вся масса была сосредоточена в центре масс тела, хотя он и находится вне тела.

## 1.5 Гравитационные потенциалы внутри шара и шарового слоя

Тут, в принципе, опять можно было бы честно посчитать интегралы и получить верные ответы, но оказывается, результата можно достичь практически не проводя вычислений, из общего анализа закона всемирного тяготения. Приведём вместо строгого доказательства принадлежащее Ньютону рассуждение о гравитационном потенциале внутри шарового слоя. При этом способе нам будет удобнее вычислять не потенциалы, а сами действующие силы. В начале заметим, что точку, расположенную в “центре” шарового слоя этот слой вообще никак не притягивает, все действующие силы взаимно компенсируются. Оказывается, это верно и для всех прочих точек  $\mathbf{x}$  внутреннейности. Как это увидеть? Возьмём  $\sigma_1$  маленький кружок (элемент площади) на сфере, образующей внутреннюю границу шарового слоя. Проведём через его границу конус с вершиной в точке  $\mathbf{x}$ . Он высечет на противоположной стороне сферы площадку  $\sigma_2$ . Получившиеся два конуса “почти” подобны, (отличаются сколь угодно мало). Значит, площади их оснований относятся как квадраты расстояний до  $\mathbf{x}$ , то есть  $S_1/S_2 \sim r_1^2/r_2^2$ . В то же время их массы, очевидно, прямо пропорциональны площадям:  $m_1/m_2 \sim S_1/S_2$ . С какой силой притягивает массу  $m_0$  находящуюся в точке  $\mathbf{x}$  кусочек  $\sigma_1$ ? С силой, пропорциональной  $F_1 \sim m_0 m_1 / r_1^2$  по закону всемирного тяготения. Кусочек  $\sigma_2$  тянет ровно в противоположную сторону с силой  $F_2 \sim m_0 m_2 / r_2^2$ . Из предыдущих рассуждений получаем  $F_1 \sim F_2$ , то есть равнодействующая этих двух сил равна нулю, и в точке  $\mathbf{x}$  гравитация шарового слоя неощутима. Итак, внутри слоя гравитационного поля нет, потенциал равен константе. В принципе любой, но обычно выбирают такую, чтобы потенциал непрерывно склеивался с потенциалом снаружи слоя.

Потенциал внутри однородного шара теперь сразу получается из принципа суперпозиции. По заданной точке  $\mathbf{x}$  разбиваем шар на шар поменьше и шаровой слой так чтобы  $\mathbf{x}$  лежала на границе раздела. Потенциал большого шара равен сумме потенциалов. Для шарового слоя это константа. А для маленького шара это потенциал шара той же плотности, что и исходный, но радиуса  $|\mathbf{x}|$ . С ростом расстояния до центра масса маленького шара растёт кубически. Значит, потенциал растёт квадратично (масса в числителе, квадрат расстояния в знаменателе) и на границе непрерывно склеивается с внешним потенциалом. Прямым вычислением получаем для силы внутри шара:

$$F(\mathbf{x}) = -G \frac{m(\mathbf{x})m_0}{|\mathbf{x}|^2} = -Gm_0 4/3\pi\mu|\mathbf{x}|$$

Для потенциала внутри получаем:

$$U(\mathbf{x}) = Gm_0(2/3)\pi\mu|\mathbf{x}|^2 + C$$

И теперь, условие непрерывной склейки при  $|\mathbf{x}| = R$  с потенциалом снаружи

$$U(\mathbf{x}) = -G \frac{m_0 M}{|\mathbf{x}|} = -G \frac{m_0(4/3)\pi R^3 \mu}{|\mathbf{x}|}$$

окончательно определяет

$$C = -2\pi m_0 \mu R^2$$

Обратите внимание, что константу интегрирования мы искали исходя из условия непрерывности функции  $U(\mathbf{x})$ , а потенциал при этом автоматически получился не только непрерывным, но и непрерывно дифференцируемым.

Всё.

## 1.6 Общий вид потенциалов для шара и шарового слоя

Суммируя результаты предыдущих разделов приведём здесь графики гравитационных потенциалов и напряжённости соответствующих полей в трёхмерии.

Для массивной материальной точки было получено

$$F_0 = -G \frac{m_0 M}{r^2}, \quad U_0 = -G \frac{m_0 M}{r}$$

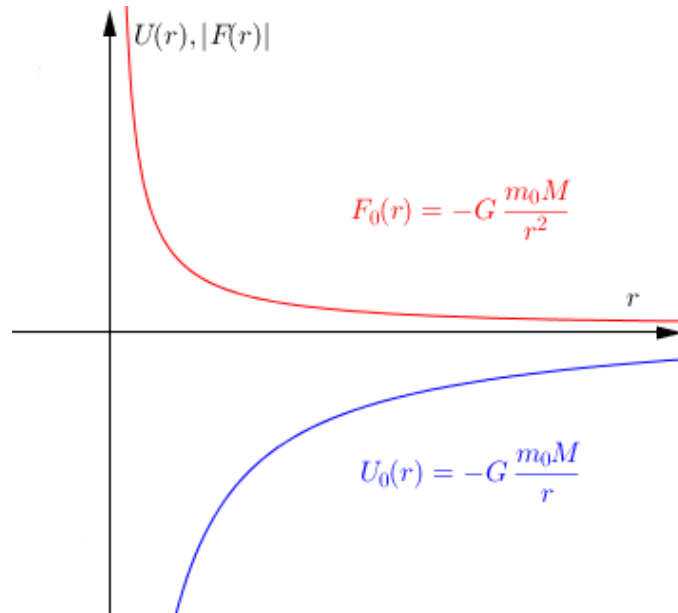


Рис. 1: Гравитационный потенциал и напряжённость поля материальной точки

Для массивного однородного шара

$$F_{R_1} = \begin{cases} -G \frac{m_0 4\pi \mu}{3} r & r < R_1 \\ -G \frac{m_0 4\pi R^3 \mu}{3r^2} & r \geq R_1 \end{cases} \quad U_{R_1} = \begin{cases} -G 2\pi m_0 \mu R + G \frac{m_0 2\pi \mu}{3} r^2 & r \leq R_1 \\ -G \frac{m_0 4\pi R^3 \mu}{3r} & r \geq R_1 \end{cases}$$

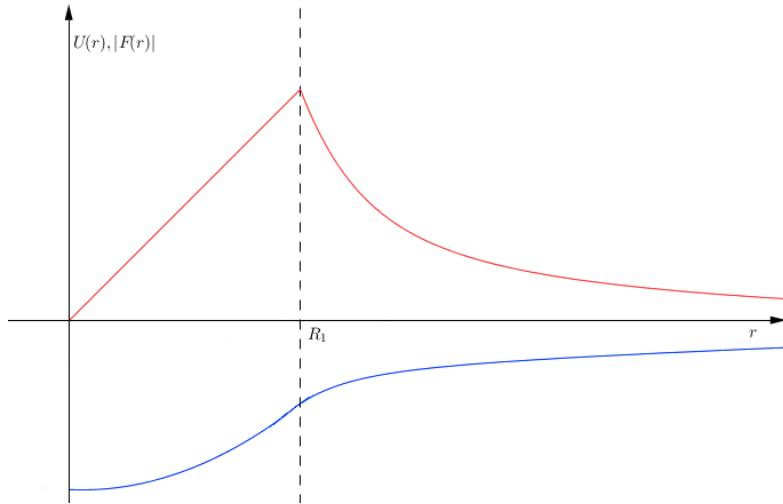


Рис. 2: Гравитационный потенциал и напряжённость поля однородного шара радиуса  $R_1$

Наконец, для шарового слоя

$$F_{R_1 R_2}(r) = F_{R_2}(r) - F_{R_1}(r) \quad U_{R_1 R_2}(r) = U_{R_2}(r) - U_{R_1}(r)$$

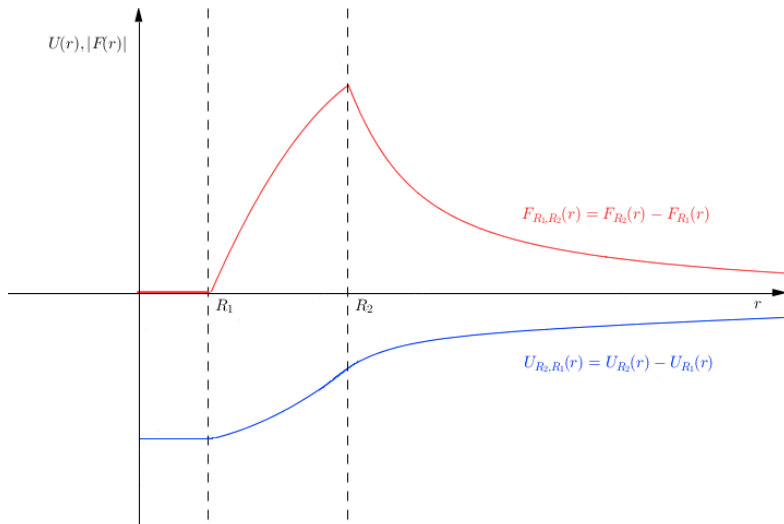


Рис. 3: Гравитационный потенциал и напряжённость поля однородного шарового слоя с радиусами  $R_1$  и  $R_2$



## 2 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции

**Задача:** *Внутри земли прорыт прямой туннель. По нему, из начального положения на краю туннеля с нулевой начальной скоростью под действием гравитации земли скользит материальная точка. Найти эффективно действующую силу, записать и решить уравнения движения. Вращением земли, трением о туннель и всем прочим пренебречь.*

**Задача:** *Придумайте гравитацию (закон всемирного тяготения) в одномерном мире (на прямой). Требования – сила взаимодействия двух материальных точек пропорциональна их массам; зависит только от расстояния между точками, а не от конкретного их положения на прямой; притяжение однородного одномерного шара (отрезка с постоянной плотностью распределения массы) равно притяжению его центра масс. Найдите потенциал.*

**Задача:** *Проверьте, что в двумерии "правильным" потенциалом будет  $U(\mathbf{x}) = \ln |\mathbf{x}|$*

**Задача:** *Почему результат вычисления потенциала для шара в трёхмерии остаётся справедливым если его плотность не постоянна, но зависит только от радиуса:  $\mu = \mu(r)$ ?*

**Задача(\*):** *Определим оператор Лапласа  $\Delta$  как дивергенцию градиента – то есть  $\Delta = \text{div} \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$  – сумма вторых частных производных по всем координатам в декартовой системе. Вычислить вид этого оператора в полярных (двумерие) и сферических (трёхмерие) координатах. Чему равен  $\Delta U$  для гравитационных потенциалов одномерного, двумерного и трёхмерного однородных шаров? Чему равен  $\Delta U$  для трёхмерных гравитационных потенциалов точки, шара и шарового слоя? Что можно предположить о смысле функции  $\Delta U$  для общего случая  $n$ -мерного массивного тела?*