Теория функций комплексного переменного – 2017
Листок 4

срок сдачи 24.04.2017

Для параметра $\tau\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\tau>0$ *определим тэта-функцию*

$$\theta(z)=\theta_1(z|\tau)=\imath\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m q^{(m-\frac{1}{2})^2}e^{(m-\frac{1}{2})2\pi\imath z},$$

где $q(\tau)=e^{\imath\pi\tau}$*; эллиптическую кривую* $\Lambda_\tau=\mathbb{C}/\{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\}$ *и пространство* $\Theta^{(n)}_{\alpha,\beta}=\{f$ *– целая* $\mid f(z+1)=e^{2\pi i\alpha}f(z),\ f(z+\tau)=e^{-\pi in\tau-2\pi inz-2\pi i\beta}f(z)\}$

1. Покажите, что $\theta(z)$ является целой нечётной функцией.

2. Покажите, что $\theta(z)\in\Theta^{(1)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, то есть

$$\begin{aligned}&\theta(z+1)=-\theta(z)\\&\theta(z+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi iz}\theta(z).\end{aligned}$$

3. Найдите нули функции $\theta(z)$ и покажите, что они простые

4. Покажите, что если для набора $\alpha_i\in\mathbb{C}$ выполняется $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=0$, то при любом наборе $a_i\in\Lambda_\tau$

$$\omega(z)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)}dz$$

является корректно определённой 1-формой на Λ_τ.

5. Покажите, что если целая функция $\xi(z)$ без нулей в $\mathbb{C}$ удовлетворяет

$$\begin{aligned}&\xi(z+1)=\xi(z)\\&\xi(z+\tau)=e^{2\pi i\lambda}\xi(z),\quad\lambda\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

то $\lambda=0\mod\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ и найдите $\xi(z)$.

6. Покажите, что если мероморфная на Λ_τ функция $\varphi(z)$ имеет n нулей и столько же полюсов, то для некоторых наборов $a_i,b_j\in\Lambda_\tau$ и $C\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\varphi(z)=C\cdot\frac{\theta(z-a_1)\cdots\theta(z-a_n)}{\theta(z-b_1)\cdots\theta(z-b_n)}e^{2\pi ikz}$$

Определите условия на возможные положения a_i,b_j.

7. Докажите, что $\dim\Theta^{(n)}_{\alpha,\beta}=n$

8. Докажите, $\dim\Theta^{(n)+}_{0,0}$ подпространства чётных тэта-функций с нулевыми характеристиками равна $\frac{n+2}{2}$ для чётных и $\frac{n+1}{2}$ для нечётных n.

9. Докажите тождество

$$\theta(a+b)\theta(a-b)\theta(z+c)\theta(z-c)+\theta(b+c)\theta(b-c)\theta(z+a)\theta(z-a)+\\+\theta(c+a)\theta(c-a)\theta(z+b)\theta(z-b)=0$$

10. Докажите, что

$$\theta(z)=2q^{\frac{1}{4}}\sin(\pi z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}e^{2\pi iz})(1-q^{2n}e^{-2\pi iz})$$