

## Семинар 12

$V$  – комплексное векторное пространство, снабженное эрмитовым скалярным произведением  $(,)$  (унитарное пространство).

1. Доказать, что матрица Грама эрмитова скалярного произведения в произвольном базисе  $V$  невырождена.

2. Доказать неравенство  $|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$  для любых двух векторов из  $V$ .

3. Каким условиям должен удовлетворять линейный оператор  $A : V$ , чтобы функция  $(Ax, y)$  обладала свойствами эрмитового скалярного произведения?

4. Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – ортонормальный базис в  $V$ . Доказать, что  $w = (w, e_1)e_1 + (w, e_2)e_2 + \dots + (w, e_n)e_n$  для любого вектора  $w \in V$ .

5. Доказать, что следующие три условия относительно линейного оператора  $U : V$  эквивалентны:

1)  $U^*U = 1$ ;

2)  $(Ux, Uy) = (x, y)$  для всех  $x, y \in V$ ;

3)  $\|Ux\| = \|x\|$  для любого  $x \in V$ .

6. Верно ли, что любая комплексная квадратная матрица унитарно эквивалентна своей жордановой форме?