ЛИСТОК 1

Задача 1. а) Докажите для произвольного n равенство $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$. б) Докажите равенство $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots = \frac{1}{1-q}$ (в левой части — бесконечное произведение); дайте точное определение выражений в левой и правой части. в) Докажите, что произвольное натуральное число можно единственным образом записать в двоичной системе счисления. г) Объясните все возможные связи (что из чего следует) между пунктами 1а, 1б и 1в.

Задача 2. Даны следующие определения чисел $\binom{n}{k}$ (где $0 \le k \le n$): 1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; 2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ и $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ для всех $0 < k < n$; 3) $\binom{n}{k}$ — количество k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$; 4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$; 5) $\binom{n}{k}$ — количество решений уравнения $x_1 + \dots + x_{k+1} = n - k$ в целых неотрицательных числах; 6) $\binom{n}{k}$ — количество путей в прямоугольнике $k \times (n-k)$. Каждый путь начинается в левом нижнем углу, заканчивается в правом верхнем и представляет собой ломаную из n горизонтальных и вертикальных звеньев длины 1. а) Докажите, что определение 1 эквивалентно определениям 2 и 3. б) Докажите, что определение 2 эквивалентно определениям 3, 4, 5 и 6. в) Докажите, что определение 3 эквивалентно определениям 4, 5 и 6. г*) Докажите, что определение 4 эквивалентно определениям 5 и 6. д) Докажите, что определение 5 эквивалентно определению 6. Все доказательства эквивалентностей следует производить напрямую, не ссылаясь на результаты других пунктов.

Задача 3. а) Докажите равенство $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} t^n = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$ (и не забудьте дать определение выражения в правой части!). б) Докажите равенство $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}$. Как связано это равенство с результатом пункта 3а?

Задача 4. Назовем число n хорошим, если $\binom{n}{k}$ — четное число для всех $1 \le k \le n-1$. Например, число $n = 4$ — хорошее ($\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$), а число $n = 6$ — нет ($\binom{6}{2} = 15$). а) Докажите, что если n — хорошее число, то $\binom{n-1}{k}$ — нечетное число для всех $0 \le k \le n-1$. б) Докажите индукцией по m, что если n — хорошее число и $0 \le k \le m \le n-1$, то $\binom{m}{k}$ и $\binom{n+m}{k}$ имеют одинаковую четность. в) Докажите, что если n — хорошее число, то $2n$ — тоже хорошее число. Выведите отсюда, что все числа вида 2^m, $m = 1, 2, \dots$, — хорошие. г) Докажите, что других хороших чисел (кроме степеней 2) не существует. д) Нарисуйте (в масштабе) первые 2^{100} строк треугольника Паскаля mod2: четные числа обозначайте белыми точками, а нечетные — черными.

Задача 5. а) Пусть F_n — множество подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, не содержащих соседних чисел. Докажите, что количество элементов в множестве F_n — $(n+1)$-е число Фибоначчи. б) Пусть $R_n(q) = \sum_{\{a_1, \dots, a_m\} \in F_n} q^{a_1 + \dots + a_m}$. (Если $m = 0$, то есть множество пустое, сумма считается равной 0.) Выведите рекуррентную формулу, выражающую $R_n(q)$ через $R_{n-1}(q)$ и $R_{n-2}(q)$. в) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} R_n(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$.

Задача 6. а) Докажите, что количество $p_k(n)$ решений уравнения $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = n$ в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения $y_1 + \dots + y_k = n$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_k$. б) Докажите, что $p_k(n)$ равно количеству решений уравнения $y_1 + \dots + y_n = n$ в целых числах, удовлетворяющих неравенствам $0 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n \le k$. в) Докажите равенство $\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n) t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^k)}$. г) Пусть $p(n)$ — количество целочисленных решений уравнения $y_1 + \dots + y_n = n$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$. Докажите равенство $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots}$ (в знаменателе бесконечное произведение).

Указание. Целочисленные решения уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, удовлетворяющие неравенствам $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_k$, называются *разбиениями* (числа n на k частей). Их полезно изображать в виде *диаграмм Юнга*: ступенчатая фигура, выровненная по левому краю; нижняя строка содержит x_1 клеток, следующая — x_2 клеток, и т.д.; всего n клеток и k строк.

Задача 7. Пусть $r(n)$ — количество наборов целых чисел $(x_1, \dots, x_k)$ (со всевозможными k), в которых $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и $x_1 + \dots + x_k = n$. а) Докажите равенство $1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) t^n = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots$. б) Докажите равенство $(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\cdots = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\dots}$ (в знаменателе показатели — всевозможные нечетные числа). в) Докажите, используя результат пунктов 7а и 7б, что $r(n)$ равно количеству решений уравнения $y_1 + \dots + y_n = n$ в целых положительных нечетных числах, удовлетворяющих неравенствам $1 \le$

$y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$. г) Докажите тот же результат, не используя пунктов 7а и 7б, а построив явное взаимно однозначное соответствие между множеством решений $(y_1, \dots, y_n)$ уравнения из пункта 7в и множеством наборов $(x_1, \dots, x_k)$ из определения $r(n)$.