

## Группы и алгебры Ли II. Семинар 19.04.17

**Задача 1.** а) Покажите, что симметрические  $n \times n$  матрицы образуют симметрическое пространство.

- б) Чему равна группы изометрий, стабилизатор точки?
- в) опишите инвариантную метрику
- г) опишите явно отражение в каждой точке

**Задача 2.** Покажите, что вещественный грассманиан  $G_{\mathbb{R}}(k, n)$  является симметрическим пространством.

**Задача 3.** Пусть  $(\mathfrak{g}, \theta)$  - ортогональная симметрическая алгебра Ли,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  - ее разложение Картана. Положим  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ,  $\theta^*(X + iY) = X - iY$ ,  $X \in \mathfrak{k}$ ,  $Y \in \mathfrak{p}$ . Тогда  $(\mathfrak{g}^*, \theta^*)$  - тоже ортогональная симметрическая алгебра Ли, называемая двойственной к  $(\mathfrak{g}, \theta)$

**Задача 4.** Рассмотрим полупростую комплексную алгебру Ли (например,  $sl(n, \mathbb{C})$ ) как вещественную алгебру Ли. Она определяет ортогональную симметрическую алгебру Ли  $(\mathfrak{g}, \theta)$ , где  $\theta(g) = -g^*$  и симметрическое пространство  $G/K$ , где  $G$ - соответствующая комплексная группа ли,  $K$ - ее максимальная компактная подгруппа. Опишите двойственную симметрическую алгебру Ли и соответствующее симметрическое пространство.

**Задача 5.** а) придумайте реализацию симметрического пространства  $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$

- б) опишите в нем локальные отражения и инвариантную метрику
- б) покажите, что двойственное компактное симметрическое пространство состоит из вещественных структур

**Задача 6.** Опишите группу  $U(n)$  как симметрическое пространство