Лекция 19.04.17

Пусть $\mathbf{g} = \oplus_{\alpha\in\Delta}\mathbf{g}_\alpha$ - корневое разложение полупростой вещественной алгебры $\mathbf{g}$ относительно присоединенного действия векторной картановской подалгебры $\mathbf{a} \in \mathbf{p}$, так что

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha \qquad \text{для любых} \qquad H \in \mathbf{a},\ X_\alpha \in \mathbf{g}_\alpha$$

Применим к этому равенству инволютивный автоморфизм θ. Учитывая, что $\theta(Y) = -Y$ для любого $Y \in \mathbf{p}$, получаем

$$[H, \theta(X_\alpha)] = -\alpha(H)\theta(X_\alpha)$$

Таким образом, инволюция θ переводит пространство $\mathbf{g}_\alpha$ в $\mathbf{g}_{-\alpha}$, а сумма $\mathbf{g}_\alpha + \mathbf{g}_{-\alpha}$ инвариантна относительно θ. Введем упорядочение в множество ненулевых корней $\Delta \setminus 0 = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$. Положим $\mathbf{n} = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathbf{g}_\mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{n}$ – нильпотентная подалгебра $\mathbf{g}$. Пусть $\{X^i_\alpha\}$ - базис пространства $\mathbf{g}_\alpha$ для $\alpha \in \Delta_+$. В качестве базисных векторов в пространстве $\mathbf{g}_\alpha + \mathbf{g}_{-\alpha}$ возьмем векторы X^i_α и $Y^i_\alpha = X^i_\alpha + \theta(X^i_\alpha)$. Тогда векторы $\{X^i_\alpha\}$ порождают подалгебру $\mathbf{n}$, а подпространство, натянутое на $\mathbf{g}^\theta_0$ и Y^i_α, совпадает с $\mathbf{k}$. Таким, образом, мы получили *разложение Ивасава* алгебры Ли $\mathbf{g}$ в прямую сумму максимальной компактной подалгебры $\mathbf{k}$, векторной картановской и нильпотентной:

$$\mathbf{g} = \mathbf{k} + \mathbf{a} + \mathbf{n}$$

Это разложение продолжается до однозначного разложения Ивасава вещественной группы в произведение максимальной компактной K, векторной $A = \exp \mathbf{a}$ и нильпотентной N,

$$G = KAN$$

Подробное доказательство можно найти в книге Хелгасона. Аргументы однозначности, в сущности, топологические: компактная группа не может иметь пересечения с $A = \mathbb{R}^r_+$ или нильпотентной N. Для общих линейный групп $G = GL(n, \mathbb{R})$ и $G = GL(n, \mathbb{C})$ разложение Ивасава хорошо известно из курса линейной алгебры под названием ортогонализации Грама-Шмидта.

Симметрические пространства. Риманово многообразие M называется *симметрическим пространством*, если для каждой точки $p \in X$ существует изометрия $s_p : M \to M$, дифференциал которой равен $-Id$ на касательном пространстве в точке p. Эта изометрия по необходимости переводит геодезические, проходящие через p в себя, отражая в них натуральный параметр t, $t \to -t$. Рассмотрение композиции отражений с центрами вдоль геодезической приводит к выводу о геодезической полноте X и транзитивности действия на M группы изометрий. Таким образом, симметрическое пространство может быть представлено в виде фактора $M = G/K$, где G - некоторая подгруппа группы изометрий M, K - стабилизатор некоторой точки $p \in M$. Поскольку K действует ортогональными преобразованиями в касательном пространстве T_pM, ее естественно предположить компактной, инвариантной относительно инволютивного автоморфизма $\theta : G \to G$,

$$\theta(g) = s_p g s_p^{-1}$$

Таким образом, естественный пример симметрического пространства - это фактор $M = G/K$, снабженный метрикой, инвариантной относительно левых сдвигом элементами G, где K - компактная подгруппа, совпадающая с неподвижными точками инволютивного автоморфизма $\theta : G \to G$.

Примеры **1**. $M=\mathbb{R}^n$. Метрика стандартная евклидова плоская. Локальное отражение $s_p(y)=e-2p$. M представляется в виде фактора группы движений $G=O(n)\ltimes\mathbb{R}^n$ по ортогональной группе $O(n)$, которая инвариантна относительно инволюции $\theta:G\to G$, где $\theta(o\cdot x)=o\cdot(-x)$, $o\in O(n)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

2. $M=S^n$ (единичная сфера в $n+1$-мерном пространстве), $M=\{x\in\mathbb{R}^n|(x,x)=1\}$. Локальное отражение – осевая симметрия вокруг оси, проходящей через точку x, $s_x(y)=-y+2\frac{(x,y)}{(x,x)}x=-y+(x,y)x$. Представляется в виде фактора $M=O(n+1)/O(n)$ двух ортогональный групп. Инволюция, выделяющая $O(n)$ - сопряжение с диагональной матрицей $I=-e_{11}+e_{22}+\ldots+e_{n+1,n+1}$.

3. $M=H^n$ (n- мерное гиперболическое пространство) - верхняя пола двуполостного гиперболоида $-x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=-1$, $x_1>0$. Это риманово многообразие с метрикой, индуцированной с гиперболической метрики $(x,y)=-x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_{n+1}y_{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Локальное отражение пишется той же формулой

$$s_x(y)=-y+2\frac{(x,y)}{(x,x)}x=-y-2(x,y)x.$$

Представляется как фактор $M=O(1,n)_0/O(n)$ связной компоненты $O(1,n)_0$ группы $O(1,n)$ по максимальной компактной подгруппе. Инволюция, выделяющая $O(n)$ - сопряжение с диагональной матрицей $I=-e_{11}+e_{22}+\ldots+e_{n+1,n+1}$.

4. Всякая компактная группа Ли U является симметрическим пространством с метрикой, инвариантной относительно левых и правых сдвигов (таковая существует благодаря операции усреднения по группе). Отражение в единице $s_e(u)=u^{-1}$. Нетрудно посчитать, сопрягая это отражение левыми или правыми сдвигами, что сопряжение с центром в точке $p\in U$ задается формулой $s_p(u)=pu^{-1}p$. Левые и правые сдвиги порождают подгруппу $U\times U$ в группе изометрий U, так что U может быть реализована как фактор группы $U\times U$ по диагонально вложенной U. Инволюция θ в этой интерпретации - перестановка P_{12} сомножителей.

Инфинитезимальная формализация понятия симметрического пространства приводит к следующему понятию.

Определение. (эффективная) Ортогональная симметрическая алгебра Ли - это пара $(\mathbf{g},\theta)$, где $\mathbf{g}$ - вещественная алгебра Ли, $\theta:\mathbf{g}\to\mathbf{g}$ - инволютивный автоморфизм, такой, что:

а) подалгебра $\mathbf{k}$ неподвижных точек является компактно вложенной подалгеброй в $\mathbf{g}$ (т.е., подгруппа $K\subset\subset\operatorname{Int}\mathbf{g}$ в присоединенной группе $\operatorname{Int}\mathbf{g}$, состоящая из внутренних автоморфизмов $Ad_{\exp k}$, $k\in\mathbf{k}$, компактна

б) (техническое условие “эффективности”) $\zeta(\mathbf{g})\cap\mathbf{k}=0$, где $\zeta(\mathbf{g})$ обозначает центр алгебры Ли $\mathbf{g}$.

В частности, из условия а) следует, что:

- форма Киллинга алгебры Ли $\mathbf{k}$ отрицательно определена
- ограничение формы Киллинга $\mathbf{g}$ на $\mathbf{k}$ отрицательно определено
- присоединенное действие $\mathbf{k}$ в $\mathbf{g}$ полупросто.
- на $\mathbf{g}$ существует риманова метрика $Q(\ ,\ )$, инвариантная относительно действия $\mathbf{k}$, т.е., операторы ad_k, $k\in\mathbf{k}$ кососимметричны в этой метрике

Имеется три выделенных типа ортогональных симметрических алгебр Ли:

1) “ компактный” тип. В этом случае алгебра Ли $\mathbf{g}$ компактна и полупроста.

2) “некомпактный” тип. В этом случае $\mathbf{g}$ - полупростая вещественная алгебра Ли, $\mathbf{k}$ - ее максимальная компактная подалгебра, $\theta : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ - инволюция Картана. Инвариантная метрика $Q(x, y) = -B(x, \theta y)$.

3) “евклидов” тип. Здесь $\mathbf{g}$ - полупрямое произведение компактной полупростой алгебры Ли $\mathbf{k}$ и ее конечномерного представления V. Автоморфизм θ определяется соотношениями $\theta(k) = k$ для $k \in \mathbf{k}$ и $\theta(v) = -v$ для $v \in V$.

Теорема. Всякая эффективная ортогональная симметрическая алгебра Ли раскладывается в прямую сумму трех идеалов

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_c \oplus \mathbf{g}_n \oplus \mathbf{g}_e,$$

компактного, некомпактного и евклидова типа соответственно, инвариантных относительно θ.

Доказательство, в сущности, состоит в приведении пары симметрических форм Q и B к диагональному виду. Соответственно, симметрические пространства, по крайней мере локально, раскладываются в произведение компактных, евклидовых и некомпактных:

$$M = M_c \times M_e \times M_n$$

Последние представляют собой факторы полупростых вещественных групп по максимальным компактным подгруппам.

Риманова геометрия симметрических пространств весьма изящна. Во-первых, симметрии s_p позволяют придать геометрический смысл элементам пространства $\mathbf{p} \subset \mathbf{g}$. Пространство $\mathbf{p}$ естественно отождествляется с касательным пространством T_oM в базисной тоске o пространства M, реализованного как G/K. Вектору $X \in \mathbf{p}$ тем самым соответствует геодезическая $\gamma(t)$. Отражение s_o сохраняет эту геодезическую, переводя точку $\gamma(t)$ в точку $\gamma(-t)$. Для каждого вектора $X \in T_oM$ обозначим через через $X(t)$ параллельный перенос X в точку $\gamma(t)$ вдоль геодезической γ. Поскольку изометрии коммутируют с параллельными переносами, отражение s_o переводит также $X(t)$ в $-X(-t)$. Композиция $s_{\gamma(a)}s_{\gamma(b)}$ переводит точку $\gamma(t)$ в $\gamma(t + 2(a - b))$ и $X(t)$ в $X(t + 2(a - b))$. Тем самым (поскольку всякая изометрия определяется своим значением и дифференциалом в одной точке) композиция $\tau_{a-b} = s_{\gamma(a)}s_{\gamma(b)}$ зависит только от $a-b$ и изометрии τ_c ("трансвекции") образуют однопараметрическую группу, $\tau_c\tau_d = \tau_{c+d}$, инфинитезимальным генератором которой как раз и будет элемент X алгебры Ли $\mathbf{g}$.

Таким образом, в симметрическом пространстве параллельные переносы вдоль любой геодезической поднимаются до однопараметрической группы глобальных изометрий пространства, а сама геодезическая тем самым продолжается до глобального векторного *поля Киллинга*, т.е., векторного поля, производная Ли которого от метрики нулевая.

Имеется также простое выражение для тензора кривизны римановой связности ∇. По определению, тензор кривизны R риманова многообразия в точке $p \in M$ сопоставляет двум касательным векторам $X, Y \in T_pM$ линейный оператор $R(X, Y) : T_pM \to T_pM$

$$R(X, Y)(Z) = ([\nabla_{\tilde{X}}, \nabla_{\tilde{Y}}] - \nabla_{[\tilde{X},\tilde{Y}]})(\tilde{Z})|_p,$$

где $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ - векторные поля со значениями X, Y, Z в точке p. Этот оператор кососимметричен по отношению к скалярному произведению в T_pM, индуцированному римановой структурой в M и, если касательные векторы $X, Y, Z \in T_o M$ представлены элементами подпространства $\mathbf{p}$ из алгебры Ли $\mathbf{g}$, то

$$R(X,Y)Z = -[[X,Y],Z],$$

т.е., оператор $R(X,Y) : \mathbf{p} \to \mathbf{p}$ отождествляется с ограничением оператора присоединенного действия $\mathrm{ad}_{[Y,X]}$ на инвариантное подпространство $\mathbf{p}$.

Секционная кривизна риманова многообразия, или кривизна $K(X,Y)$ в двумерном направлении, определяемая, например, как гауссова кривизна в точке p двумерной поверхности, полученной объединением геодезических, выходящих их p по направлениям векторов из плоскости, порожденной касательными векторами X, Y, выражается через R по формуле

$$K(X,Y) = Q(R(X,Y)Y,X),$$

так что для симметрического пространства

$$K(X,Y) = -Q([[X,Y],Y],X) \tag{1}$$

Пусть теперь M - "неприводимое"симметрическое пространство одного из трех типов. Приведем формы $Q(X,Y)$ и $B(X,Y)$ (ограничение формы Киллинга) на $\mathbf{p}$ к общему диагональному виду в ортонормальном для Q базисе в и разложим соответственно всякий вектор $X \in \mathbf{p}$ в сумму $X = \sum_i X_i$ ортогональных относительно Q векторов, так что

$$B(X_i, Y_j) = \delta_{i,j}\lambda_i, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \qquad \text{при} \quad i \neq j$$

Из формулы (1) следует, что секционная кривизна симметрического пространства евклидова типа тождественно равна нулю. Пусть теперь M либо компактного типа, либо некомпактного. Если M - компактного типа, то все λ_i отрицательны, если M - некомпактного - то положительны. Нетрудно понять, что $[X_i, Y_j] = 0$ при $i \neq j$ и

$$K(X,Y) = -\sum_i Q([[X_i,Y_i],Y_i],X_i) = -\sum_i \lambda_i^{-1} B([[X_i,Y_i],Y_i],X_i) =$$
$$\sum_i \lambda_i^{-1} B([X_i,Y_i],[X_i,Y_i])$$

Поскольку $[X_i, Y_i] \in \mathbf{k}$, $B([X_i,Y_i],[X_i,Y_i]) < 0$, так что для M компактного типа получаем сумму положительных выражений, для M некомпактного - отрицательных.

Таким образом, все компактные симметрические пространства являются пространствами положительной кривизны, все симметрические пространства некомпактного типа являются пространствами отрицательной кривизны.

Литература

1. С.Хелгасон, Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства, гл. IV–VI

2. Ш.Кобаяси, С.Номиндзу, Основы дифференциальной геометрии, т.1

3. С.П.Новиков, И.А.Тайманов, Современные геометрические структкры и поля, гл.10