Лагранжева механика 4 (2016/2017)

В.А. Побережный

Практика перед контрольной

Качественное поведение системы в потенциальном поле

Задача *Частица массы m движется в трёхмерии в поле с потенциалом $U(\mathbf{x}) = -\mu r^{-n}$.*

- *Показать, что частице, находящейся в момент времени $t = 0$ в произвольной (кроме начала координат) точке можно придать некоторую конечную скорость так, что она уйдёт на бесконечность в том, и только в том случае, когда $n \geqslant 0$*
- *Найти скорость отрыва (минимальную начальную скорость для ухода на бесконечность) как функцию от начального положения точки.*
- *Пусть частица испускается из некоторой точки со скоростью отрыва. Показать что во всех точках траектории её скорость (модуль) будет равна скорости отрыва.*

Сначала очевидное замечание по постановке задачи. Чтобы вообще был смысл говорить об отрыве и уходе на бесконечность потенциал должен быть притягивающим, иначе, вообще всё всегда будет улетать на бесконечность (при такой явной форме потенциала). Что нужно чтобы потенциал был притягивающим? Нужно чтобы функция $-\mu r^{-n}$ возрастала на $(0, +\infty)$. В этом случае $F = -\nabla U = -\frac{dU}{dr} < 0$ и сила, действующая на точку тянет её к началу координат. Следовательно n не может быть равно нулю, а знаки μ и n связаны, должно выполняться $\mu n > 0$.

Далее, система потенциальна и значит в ней выполняется закон сохранения энергии $E = T + U = E_0 = const$. Кинетическая энергия $T = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} \geqslant 0$ и значит, если частица в начальный момент времени имела энергию E_0, то так как и во все последующие моменты её энергия будет той же то она всегда будет находится в области где $U = -\mu r^{-n} \leqslant E_0$. Следовательно необходимым условием возможности ухода на бесконечность является $\lim_{r\to+\infty} U(r) \leqslant E_0$. Отсюда сразу получаем, что при $n < 0$ движение частицы всегда финитно, то есть, происходит в конечной области $r^{-n} \leqslant -E_0/\mu$. Если же $n > 0$, то $\lim_{r\to+\infty} U(r) = 0$ и движение частицы финитно при $E_0 < 0$ но ещё может оказаться инфинитным при $E_0 \geqslant 0$. Доказали, что если скорость отрыва существует, то $n > 0$.

Из закона сохранения энергии видим, что если $n > 0$, в начальный момент времени скорость частицы направлена по радиусу от начала координат и начальная энергия $E_0 \geqslant 0$ то скорость всегда остаётся положительной, и даже, отделённой от нуля, и частица уходит на бесконечность с предельной скоростью $\dot{r} = \sqrt{2E_0/m}$. Какой начальной скорости соответствует энергия $E_0 \geqslant 0$ в таких конфигурациях? В начальный момент времени частица находилась на расстоянии r_0 от начала координат, и значит $mv_0^2/2 - \mu r_0^{-n} = E_0$. Из требования $E_0 \geqslant 0$ получаем $v_0 \geqslant \sqrt{2\mu r_0^{-n}/m}$. Следовательно, при $n > 0$ конечная скорость отрыва существует и не превосходит $\sqrt{2\mu r_0^{-n}/m}$ – минимальной начальной скорости при которой частица уйдёт на бесконечность если скорость направлена вдоль начального радиус-вектора частицы.

Очевидно, что полученная оценка точна, если модуль начальной скорости меньше чем $\sqrt{2\mu r_0^{-n}/m}$, то вне зависимости от её направления $E_0 < 0$ и движение финитно. Следовательно зависимость скорости отрыва частицы от расстояния r до начала координат в начальный момент времени имеет вид $v_0(r) = \sqrt{2\mu r^{-n}/2}$.

Пока что мы ничего не сказали о движении частицы если её начальная скорость не была направлена по прямой, соединяющей начальное положение частицы с началом координат. Конечно, интуитивно понятно, что если частица уходит от центра не по прямой, то часть энергии тратится на угловое движение, что уж точно никак не облегчает улёт на бесконечность. Скорее всего, уход на бесконечность затруднится и потребует увеличения начальной скорости, а возможно и вовсе станет невозможным. Этот вопрос остаётся содержательным и не слишком сложным упражнением для самостоятельного разбора. Замечание – при практическом исследовании этого случая пользоваться парой законов сохранения (энергии и момента импульса) намного удобнее чем уравнениями движения.

Уравнения движения в различных координатах

Одним из заметных неудобств ньютоновой механики является её сильная зависимость от системы отсчёта или координат. Второй закон Ньютона, и следовательно уравнения движения, достаточно просто выписываются в инерциальных системах отсчёта. Их явный вид при этом может получиться довольно сложным. При переходе к неинерциальным системам, зачастую являющимися наиболее естественным выбором для работы с конкретной системой или моделью, уравнения движения могут принимать и вовсе крайне запутанный вид.

Задача *Выписать уравнения движения материальной точки в поле силы* $\mathbf{F}$ *в полярных координатах.*

Наиболее простым, и как следствие наименее осмысленным и максимально трудоёмким, но безусловно работающим способом будет прямая подстановка замен координат $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ в уравнения движения $m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y$ с последующим выделением проекций на координатные направления полярной системы координат.

Мы немного сократим вычисления и сделаем их более прозрачными применив часто использующийся при работе с двумерными моделями, особенно в полярных координатах приём, перейдя к комплексной координате $z = x + iy = re^{i\varphi}$.

Для переменной z в исходной декартовой, и в соответствующей ей локальной декартовой (с началом отсчёта в точке z) системах координат имеем $m\ddot{z} = Z = F_x + iF_y = Re^{i\theta}$. Нас интересуют компоненты силы

$Z' = F_r + iF_\varphi$ в локальной декартовой системе координат отвечающей полярным координатам на плоскости. В этой системе одна ось совпадает с направлением z, а вторая ей перпендикулярна и направлена по часовой стрелке. При этом обе оси проходят через точку z. Очевидно, вторая локальная система получается из первой поворотом на угол $\arg z = \varphi$. Следовательно $Z' = Ze^{-i\varphi}$, и значит, $Z = F_x + iF_y = (F_r + iF_\varphi)e^{i\varphi}$. Значит исходные ньютоновы уравнения движения можно записать как $m\frac{d^2}{dt^2}\left(re^{i\varphi}\right) = \left(F_r + iF_\varphi\right)e^{i\varphi}$. Дифференцируем, получаем

$$m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) + i\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\right]e^{i\varphi} = (F_r + iF_\varphi)e^{i\varphi}$$

Откуда окончательный вид уравнений движения

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = F_\varphi \end{cases}$$

В завершение заметим, что нам уже известно, что в центральном поле ($F_\varphi = 0$) момент импульса $M = \mathbf{x} \times (m\dot{\mathbf{x}})$ сохраняется. Как это увидеть в полученных уравнениях? Момент в полярных координатах мы уже вычисляли, $M = r^2\dot{\varphi}$. Теперь видно, что $\frac{d}{dt}M = rF_\varphi$.

Явный вид градиента в различных координатах

Задача *Найти явное выражение для градиента в полярных координатах.*

В первую очередь стоит определить, что именно мы называем градиентом функции f. Во-первых, это вектор. Во-вторых, в "обычных" (декартовых, ортонормированных, итд) координатах x^i его компоненты имеют вид $v_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Понятно, что на произвольные координаты $\widetilde{x}^i$ оба эти свойства дословно перенесены быть не могут: если градиент это вектор (или ковектор?!), то есть тензор типа (1,0) $\big($или $(0,1)$?!$\big)$, то как известно, при замене координат его компоненты преобразуются следующим образом $\widetilde{v}^i = v^j c^i_j = v^j \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}$ (или $\widetilde{v}_i = v_j d^j_i = ...$, как правильно?!). Очевидно что для произвольных координат $\widetilde{x}^i$ и функции f полученное выражение для компонент $\widetilde{v}^i$ не будет совпадать с $\frac{\partial f}{\partial \widetilde{x}^i}$.

То есть, самый первый наивный подход – «градиент функции f это такой (ко-?!)вектор, который в любых координатах x^i имеет компоненты $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ » не работает, такого объекта просто не существует. Вполне ожидаемо.

Следующее тоже довольно наивное, но уже вполне самосогласованное определение строится элементарно – «градиент функции f это такой вектор, который в **декартовых ортонормированных** координатах x^i имеет компоненты $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, а в произвольных координатах компоненты вычисляется по известным тензорным законам преобразований». Это уже вполне работающее определение, по нему можно проводить любые вычисления, но всё-таки оно неприятное, совершенно не виден геометрический да и общий смысл объекта.

Более разумный подход, очевидно, должен опираться на геометрию. Чем выделены декартовы ортонормированные координаты? Тем что в них евклидово скалярное произведение имеет единичную матрицу Грамма. Какой смысл имеет скалярное произведение градиента функции f и произвольного вектора u, взятых в точке $\mathbf{x}_0$? Известно какой – это производная функции f

в точке $\mathbf{x}_0$ по направлению u. Что, как мы опять-таки уже знаем из анализа на многообразиях есть $df|_{\mathbf{x}_0}(u)$.

Теперь у нас уже есть всё необходимое для понятного и удобного определения – «градиентом гладкой в области D евклидова пространства функции f называется такое поле ∇f, что для всякого гладкого на D векторного поля L выполняется

$$(\nabla f, L) = df(L)»$$

При таком определении вычисления укорачиваются, и становятся более понятными. В качестве примера, найдём выражение для градиента в полярных координатах.

Как устроено евклидово скалярное произведение в полярных координатах мы знаем, или же легко вычисляем:

$$(\partial_r, \partial_r) = 1 \qquad (\partial_\varphi, \partial_\varphi) = r^2 \qquad (\partial_r, \partial_\varphi) = 0$$

Поля ∇f и L раскладываем по базисным ∂_r и ∂_φ:

$$\nabla f = (\nabla f)^r \partial_r + (\nabla f)^\varphi \partial_\varphi \qquad L = L^r \partial_r + L^\varphi \partial_\varphi$$

Получаем скалярное произведение

$$(\nabla f, L) = (\nabla f)^r \cdot L^r + r^2 (\nabla f)^\varphi \cdot L^\varphi$$

С другой стороны:

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \Rightarrow df(L) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot L^r + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot L^\varphi$$

Из чего сразу видим

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \partial_\varphi$$

Для физических и механических задач часто более удобен ответ в отнормированных единичных векторах, ведь мы меряем силу (от потенциала) хотя и в разных координатах, но одними и теми же приборами. Длины векторов $\partial_r, \partial_\varphi$ мы уже знаем, ответ выписывается автоматически:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{\mathbf{e_r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{\mathbf{e}_\varphi}$$

1 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции

Задача(*): *Покажите, что в трёхмерии частица движущаяся в потенциале* $U(\mathbf{x}) = -\mu r^{-n}$

- *при* $n > 2$ *не может уйти на бесконечность иначе как по прямой.*
- *при* $n = 4$ *будет иметь траекторией либо прямую, либо окружность.*

Задача: *Выпишите уравнения движения материальной точки в поле силы* $\mathbf{F}$ *в цилиндрических и сферических координатах.*
Задача: *Каким условиям должны удовлетворять координаты* $\widetilde{x}^i$ *чтобы компоненты вектора градиента* ∇f *имели в них вид* $(\nabla f)_i = \dfrac{\partial f}{\partial \widetilde{x}^i}$?

Задача:*Для гладких функций* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *зависящих только от* $r = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$ *выпишите явно действие оператора Лапласа* $\Delta = \partial^2_{x^1 x^1} + \cdots + \partial^2_{x^n x^n}$ *в терминах* f, f', r.