

8. Более общее определение вероятности

- 8.1. а) Один стрелок попадает в цель с вероятностью 0,8, другой — 0,7. Найдите вероятность поражения цели, если оба стреляют одновременно.
б) Рабочий обслуживает три станка. Вероятности их остановки равны соответственно 0,1, 0,2, 0,15. Найдите вероятность безотказной работы всех станков.

Для формализации вышеприведённых задач необходимо следующее более общее определение. Пусть задано множество M и каждому $m \in M$ поставлено в соответствие неотрицательное число $P(m)$, причём сумма всех этих чисел равна 1. Тогда *вероятностью* события A называется сумма чисел $P(m)$ по всем $m \in A$. Например, в вышеприведённой задаче разумно считать, что множество M состоит из четырёх элементов: оба стрелка попали, первый попал и второй промахнулся, первый промахнулся и второй попал, оба промахнулись.

- 8.2. Сформулируйте и докажите аналоги правил суммы и произведения для такого обобщения.

Приведённое определение можно обобщить на случай бесконечного множества M . (В этом случае для всех $m \in M$, кроме счётного числа, $P(m) = 0$.) Ещё более интересно следующее обобщение.

- 8.3. Найдите вероятность того, что случайная точка правильного треугольника лежит:

- а) в треугольнике, образованном средними линиями; б) во вписанном круге.

Пусть $A \subset M$ — подмножества в $\mathbb{R}^n$, имеющие *объём* (длину, площадь...). Тогда *вероятностью* подмножества A в M называется число

$$P(A) = P_M(A) := V(A)/V(M),$$

где $V(A), V(M)$ — объёмы подмножеств. Как и в дискретном случае, когда множество M фиксировано, его подмножества, имеющие длину (площадь, объём), часто называются *событиями*.

- 8.4. Двое договорились встретиться между 10 и 11 часами. Каждый из них приходит на место встречи в случайный момент в этом промежутке, ждёт десять минут и, если второй не появился, уходит. С какой вероятностью встреча состоится?

- 8.5. Стержень случайным образом ломают на три части. С какой вероятностью из этих частей можно составить треугольник?

- 8.6. Найдите вероятность того, что случайный треугольник является остроугольным.

В задаче 8.5 за M можно принять равносторонний треугольник с высотой, равной длине стержня. Так как для каждой точки внутри треугольника сумма расстояний от неё до сторон равна высоте, эти расстояния можно считать равными длинам получившихся при разломе частей стержня. Обратите внимание, что у этой задачи имеются другие естественные формализации, дающие другой ответ!

- 8.7 (Задача Бюффона). На плоскость, разлинованную параллельными прямыми, находящимися на расстоянии a друг от друга, случайно брошена игла длины $\lambda < a$. Найдите вероятность того, что она пересечётся с какой-нибудь из прямых.

- 8.8. а) При каком минимальном количестве учеников в классе вероятность того, что у двоих из них день рождения будет в один и тот же день, будет больше $1/2$?

- б) Вы ищете человека, у которого день рождения совпадает с вашим. Какое среднее число людей вам надо опросить, чтоб эта вероятность превысила бы $1/2$?

- в*) В государстве Кривия действует такой закон о трудоустройстве: наниматель обязан предоставлять всем работникам предприятия выходной, если хотя бы у одного из них день рождения, и принимать на работу всех вне зависимости от того, когда у них день рождения. За исключением этих выходных работники трудятся все 365 дней в году. Предприниматель хочет оптимизировать среднее количество человеко-дней в году. Сколько рабочих трудятся на предприятии в Кривии?