Независимость и условная вероятность

Подмножества (т. е. события) A и $B \neq \emptyset$ конечного множества M *независимы*, если доля (т. е. вероятность) множества $A \cap B$ в B равна доле (т. е. вероятности) множества A в M. Приведём симметричную переформулировку, которая работает и для $B = \emptyset$. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если $|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|$.

9.1. Независимы ли следующие подмножества?

а) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

б) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

9.2. Независимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

а) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

б) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

в) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

г) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

9.3. Подмножества A и B конечного множества независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B}$ независимы.

9.4 (Задача о разделе ставки). Два дворянина из свиты короля в ожидании выхода Его Величества решили сыграть в кости. Они сделали одинаковые ставки и договорились, что тот, кто первым выиграет 10 партий, получает все деньги. При счёте 9:8 появился король, и игру пришлось закончить. Как следует поделить деньги?

Это одна из задач, положивших начало теории вероятностей. В XVII в. её предложил Блезу Паскалю его знакомый — один из тех дворян, о которых говорится в задаче. Паскаль понял, что следует поделить деньги пропорционально шансам, которые имели игроки на окончательную победу в момент остановки игры. Он нашёл способ вычисления этих шансов (для любого счёта). Другой метод решения задачи, приводящий к тому же результату, нашёл другой великий математик XVII в. Пьер Ферма. Их методы основаны на следующем понятии.

Условной вероятностью подмножества A при условии подмножества B, для которого $P(B) \neq 0$, называется отношение $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Ясно, что независимость подмножеств A и B равносильна тому, что $P(A|B) = P(A)$.

9.5. а) Известно, что при броске игральной кости выпало чётное число. Найдите вероятность того, что оно меньше 5.

б) В семье два ребёнка. Известно, что один из них мальчик. Найдите вероятность того, что второй ребёнок тоже мальчик. (Мы предполагаем, что вероятности рождения мальчика и девочки равны половине и что пол второго ребёнка не зависит от пола первого.)

9.6. Лампочки выпускаются двумя заводами, причём первый из них производит 70 % всей продукции. Лампочки, произведённые первым заводом, горят с вероятностью 0,98, вторым — 0,95.

а) Найдите вероятность того, что купленная лампочка горит.

б) Купленная лампочка оказалась бракованной. Найдите вероятность того, что она выпущена первым заводом.

9.7 (Формула полной вероятности). Если $M = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ и $P(B_j) \neq 0$ (говорят, что $B_1, \ldots, B_n$ — *полная система событий*), то $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)$.

9.8 (Формула Байеса). Справедливо равенство $P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A)$.

Часто применяется следствие двух предыдущих формул:

$$P(X|A) = \frac{P(A|X)P(X)}{P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)}.$$

9.9. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,04. Если изделие бракованное, то оно пройдёт тест с вероятностью 0,05, а иначе — с вероятностью 0,98. Найдите (с точностью до 0,0001) вероятность того, что изделие выдержавшее тест: **а)** один раз; **б)** два раза, бракованное.