Математический анализ. 2 курс. 2 семестр.

Программа экзамена 13 мая 2017 г.

1. Ортогональность тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$. Формула коэффициентов Фурье. Сходимость в $L_2[-\pi, \pi]$ частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системы. Равенство Парсеваля. Тригонометрические системы в $L_2[0, \pi]$ и их полнота. Формулы коэффициентов Фурье и равенство Парсеваля для этих систем. Ряд Фурье в комплексной форме. Формулы для коэффициентов Фурье и равенство Парсеваля для квадрата нормы и для скалярного произведения в $L_2[-\pi, \pi]$.

2. Дать определение многочленов Лежандра. Доказать ортогональность этой системы. Сформулировать теорему об ортонормированных системах в прямых произведениях пространств L_2. Тригонометрическая система в $L_2[-\pi, \pi]^2$ в комплексной форме. Привести формулы для коэффициентов Фурье и выписать равенство Парсеваля. Многочлены ортогональные относительно данного веса. Многочлены Чебышева с соответствующим весом. Доказать ортогональность и полноту системы многочленов Чебышева.

3. Представление частичной суммы тригонометрического ряда Фурье в виде интеграла Дирихле. Доказать лемму Римана. Принцип локализации для тригонометрического ряда Фурье. Достаточное условие Дини сходимости ряда Фурье в точке к значению функции в этой точке. Достаточное условие сходимости ряда Фурье в каждой точке для ограниченных функций с разрывами первого рода.

4. Достаточное условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Представление сумм Фейера в виде интеграла Фейера. Установить свойства ядер Фейера. Доказать теорему Фейера для непрерывных периодических функций.

5. Доказать теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Доказать вторую теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами. Доказать лемму о дифференцировании ряда Фурье. Установить связь гладкости функции со скоростью убывания коэффициентов ее ряда Фурье. Доказать теорему о скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функции. Доказать формулу интегрирования ряда Фурье.

6. Доказать изопериметрическое неравенство. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности (без обоснования сходимости).

7. Доказать сходимости ряда, представляющего решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности, которое получается по методу Фурье. Доказать теорему о существовании решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о единственности решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Записать формулу для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности с помощью функции Грина этой задачи и обосновать ее.

8. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения упругих колебаний струны. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать и доказать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи

для уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи для неоднородного уравнения упругих колебаний струны с правой частью (без доказательства) и вывести формулу для решения.

9. Сформулировать общую задачу Штурма–Лиувилля. Доказать основные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля: симметричность и положительность оператора, ортогональность собственных функций, однократность собственных значений. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля (без доказательства).

10. Вывести формулу Фурье для функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ формально из ряда Фурье этой функции (без обоснования сходимости). Доказать теорему о сходимости интеграла Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при выполнении условия Дини. Записать интеграл Фурье в комплексной форме и дать определение преобразования Фурье. Доказать однозначность (инъективность) преобразования Фурье для кусочно непрерывной функции. Найти преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

11. Доказать равномерную сходимость последовательности $\{F[f_n]\}$ преобразования Фурье, если известно, что $\{f_n\}$ сходится в норме $L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ является ограниченной непрерывной функцией, причем $F[f_n](\lambda) \to 0$ $(|\lambda| \to \infty$. Вывести формулу для преобразования Фурье производной $f'(x)$ при условии, что f, $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $f(x)$. Связь порядка гладкости функции со степенью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье. Вывести формулу производной преобразования Фурье $F[f](\lambda)$ при условии, что $f(x)$, $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $F[f](\lambda)$. Связь порядка гладкости функции $F[f](\lambda)$ со степенью убывания на бесконечности функции $f(x)$.

12. Дать определение пространства Шварца S. Привести примеры функций из пространства Шварца. Доказать, что операторы дифференцирования и умножения на полином переводят пространство Шварца в себя. Доказать, что преобразование Фурье переводит пространство Шварца в себя. Формула обратного преобразования Фурье в пространстве Шварца. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца. Дать определение преобразования Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Сформулировать теорему об обращении преобразования Фурье при выполнении условия Дини в $\mathbb{R}^n$. Дать определение пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^n)$.

13. Получить формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ методом разделения переменных (без строгого обоснования). Вывести формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ в пространстве Шварца с помощью преобразования Фурье. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ с начальным условием из пространства Шварца. Доказать основные свойства ядра Пуассона $G(x, y, t)$: положительность, бесконечную дифференцируемость по всем аргументам при $t > 0$, выполнение уравнения теплопроводности для $G(x, y, t)$ при $t > 0$, и равенство $\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)dx = 1$. Доказать, что формула Пуассона, где φ – непрерывная и ограниченная функция, задает бесконечно дифференцируемую функцию $u(x, t)$ при $t > 0$, которая является решением уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$. Доказать, что формула Пуассона, в которой φ – непрерывная и ограниченная функция, задает непрерывную функцию $u(x, t)$ при $t \geq 0$, которая удовлетворяет начальному условию $\varphi(x)$.

14. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ с начальным условием из пространства Шварца. Вывести формулу для решения уравнения колебаний бесконечной струны в пространстве Шварца S с помощью преобразования Фурье. Доказать теорему Даламбера а представлении произвольного решения уравнения колебаний струны класса $C^2(D)$ в выпуклой области D в виде суммы двух бегущих волн. Вывести формулу Даламбера для решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны.

15. Дать определение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами порядка m в пространстве $\mathbb{R}^n$. Дать определение УрЧП, корректного по Петровскому. Привести примеры уравнений, корректных и некорректных по Петровскому. Вывести формулу для решения задачи Коши уравнения, корректного по Петровскому, с помощь преобразования Фурье. Доказать, что решение является бесконечно дифференцируемой функцией и удовлетворяет уравнению. Решить задачу Коши для уравнение Шредингера в $\mathbb{R}$ с начальным условием из пространства Шварца S.

16. Дать определение свертки $f_1 * f_2$ функций из пространства $L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что $f_1 * f_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Вывести формулу преобразования Фурье от свертки двух функций. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши одномерного уравнения теплопроводности в пространстве S с помощью формулы преобразования Фурье свертки. Сформулировать теорему Планшереля. Дать определение преобразованию Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Доказать формулу Планшереля для функции из пространства Шварца S. Доказать теорему Планшереля для финитных функций из $L_2(\mathbb{R})$. Предполагая доказанной теорему Планшереля для финитных функций из $L_2(\mathbb{R})$, доказать эту теорему для любых функций из $L_2(\mathbb{R})$.

Порядок проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Все студенты получат по билету, в котором будет два вопроса из приведенного выше списка. На подготовку дается 30 минут. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. После ответа на билет каждый студент получит по выбору преподавателя один дополнительный вопрос из приведенного выше списка сформулировать какое-то определение или теорему (без доказательства) для ответа без подготовки, а также одну задачу для решения (подготовка 5-10 мин). Задачи будут не сложные, в основном на понимание материала курса. Многие из этих задач разбирались на лекция, семинарах или были в листках.

Желаю успешной сдачи финального экзамена!

Владимир Чепыжов