

Листок 13. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

АНАЛИЗ, 1 КУРС, 20.05.2017

13◊1 Вычислите пределы: а) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} dx$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-n \sin x} dx$.

13◊2 Пусть $f \in C[a, b]$, $F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$. Докажите, что $F^{(n)}(x) = f(x)$ на $[a, b]$.

13◊3 Вычислите интегралы (применив дифференцирование по параметру)

а) $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctg(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$;

б) $I(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$, $|\alpha| < 1$.

13◊4 Пусть $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2} e^{-y^2/x}$ при $x > 0$ и $f(x, y) = 0$ при $x = 0$. Убедитесь, что равенство $\frac{d}{dy} \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 f'_y(x, y) dy$ выполнено не для всех $y \in [0, 1]$. Какие условия теоремы о дифференцировании интеграла по параметру здесь нарушаются?

Г и В-функции

13◊5 Исследуйте интегралы на равномерную по α сходимость на указанных множествах:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + (x - \alpha)^4}$ при $\alpha \in (-\infty, 0]$ и при $\alpha \in [0, +\infty)$;

б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{x}} dx$ при $\alpha \in [1, +\infty)$ и при $\alpha \in [0, +\infty)$.

13◊6 а) Докажите, что $\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-xy} dy$ при $s > 0$, $x > 0$.

б) Докажите, что $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^\alpha} dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) \cos(\pi\alpha/2)}$ при $0 < \alpha < 1$, $a > 0$.

в) Докажите, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x^\beta} dx = \frac{\pi b^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta) \sin(\pi\beta/2)}$ при $0 < \beta < 2$, $b > 0$.

Указание: для решения (б) и (в) пригодится (а).

г) Вычислите интегралы Френеля $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ и $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

13◊7 а) Докажите, что $(\ln \Gamma(x))'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$ для всех $x > 0$.

б) Вычислите $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

13◊8 Выразите длину эллипса $2x^2 + y^2 = 1$ через значения В-функции.