Точечные процессы:

Точечные процессы — это наиболее общий язык для описания случайных точечных конфигураций.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Здесь Ω — одночастичное пространство. Мы будем использовать в качестве Ω $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$ или объединения таких множеств, например $\mathbb{R}\times\{1,\dots,n\}$. В общем случае может быть произвольное хаусдорфово сепарабельное топологическое пространство. $\mathcal{F}$ — борелевская сигма-алгебра и μ — мера.

<u>Определение.</u>

Конфигурация $\xi = \{x_i\} \subset \Omega$ — локально конечный набор точек, т.е. для $\forall$ компактного подмножества $A \subset \Omega$ $\#\{x_i \in A\} < \infty$.

Эквивалентно конфигурацию можно задавать как функцию

$V : \Omega \to \mathbb{Z}_+$; такую что $\mathrm{Supp}\, V|_A = \{x \in A : V(x) > 0\}$ — конечен.

Пусть $\mathrm{Conf}(\Omega)$ — пространство конфигураций
Пусть $B \subset \Omega$ — произвольное борелевское множество.
Определим цилиндрические множества $C_n^B \subset \mathrm{Conf}(\Omega)$

$C_n^B := \{\xi \subset \mathrm{Conf}(\Omega) : V(B) = n\}$. Определим $\mathcal{B}$ как сигма-алгебру, порождённую цилиндрическими множествами. Пусть P — вероятностная мера на $(\mathrm{Conf}(\Omega), \mathcal{B})$.

Тогда тройка $(\mathrm{Conf}(\Omega), \mathcal{B}, P)$ — точечный процесс

Пример. Пуассоновский процесс интенсивностью $p(x)$.

Пусть $p(x)$ — локально интегрируемая положительная ф-я. Пуассоновский процесс:
1) $V(A)$ — Пуассоновская случайная величина для $\forall$ ограниченного Борелевского множества A

2) $\mathbb{E}(\nu(A)) = \int_A p(x)\,dx$

3) $\nu(A_1), \dots, \nu(A_n)$ – независимые в совокупности сл. в. для $\forall\, A_1, \dots, A_n$: $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Корреляционные ф-ии:

Пусть $A \subset \Omega$ – борелевское множество.

Факториальные корреляционные меры: $\rho_k(A^k) = \mathbb{E}\left(\frac{\nu(A)!}{(\nu(A)-k)!}\right)$

Корреляционные ф-я: $R_k(x_1, \dots, x_n)$ – локально интегрируемая ф-я:

$$\rho_k(A^k) = \int_{A^k} R_k(x_1, \dots, x_n)\, d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n)$$

Предложение.

Пусть $\pi_n^A(x_1, \dots, x_n)\,\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n)$ – вероятность того, что $\xi|_A$ содержит ровно n точек в $dx_1 \dots dx_n$, а $R_k(x_1, \dots, x_k) = \mathbb{P}((x_1, \dots, x_k) \subset \xi|_A)$.

Тогда $$\int_{A^k} R_k(x_1 \dots x_k)\, d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_k) = \mathbb{E}\left(\frac{\nu(A)!}{(\nu(A)-k)!}\right)$$

Док-во:

$$R_k(x_1, \dots x_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{A^j} \pi^A_{k+j}(x_1 \dots x_k, y_1, \dots, y_j)\,\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_j)$$

$$\int_{A^k} R_k(x_1 \dots x_k)\, d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_k) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{j!}{(j-k)!} \frac{1}{j!} \int_{A^j} \pi_j^A(x_1 \dots x_j)\,\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_j)$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{j!}{(j-k)!} \mathbb{P}(\# A = j) = \mathbb{E}\left(\frac{\nu(A)!}{(\nu(A)-k)!}\right)$$

Производящие ф-я:

Предложение: Пусть $X : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ сл. в., такая что произв. ф-я $f(z) = \mathbb{E}(z^X)$ аналитична в окрестности $z = 1$,

1) Тогда коэффициенты разложения

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!} \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1))$$

однозначно опред. моменты!

2) если $f(z)$ аналитична в кольце $1-\delta < |z| < 1+\delta$, то $f(z)$ однозначно задаёт распределение

Док-во: 1) $\mathbb{E} X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) f^{(k)}(1)$ $S(n,k)$ - числа Стирлинга 2-го рода

2) $f(z) \to \mathbb{E}(e^{itX})$ - хар. ф-я $\Rightarrow$ задаёт распределение.

Чтобы задать точечн. процесс необходимо задать распределение на борелевских подмножествах.

$$f_{V(A)}(z) = \mathbb{E}(z^{V(A)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \rho_n(A^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \int_{A^n} R_n(x_1,\dots,x_n)\mu(dx_1)\dots\mu(dx_n)$$

Чтобы $\rho_n(x_1\dots x_n)$ задавали точечный процесс единств. образом достаточно, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\int_{A^n} R_n(x_1\dots x_n)\mu(dx_1)\dots\mu(dx_n)\right)^{1/n} = \infty$$

Теорема (Ленард)

Локально интегрируемые ф-ии $R_n(x_1\dots x_n)$ являются корреляц. ф-ями какого либо точечного процесса. $\Leftrightarrow$ выполнены 2 условия

1) Симметричность $R_n(x_1\dots x_n) = R_n(x_{\sigma_1}\dots x_{\sigma_n})$ $\sigma \in S_n$

2) Положительность матожиданий от положительных ф-ий с компактным носителем.

Еще один способ думать о случайных точечных полях как о случайных точечных мерах. Для этого мы рассматриваем измеримое отображение $\nu : Conf(\Omega) \to M$, где M пространство точечных локально-конечных мер. Конфигурация $\xi = \{x_i\}$ отображается в $\nu_\xi = \sum \delta_{x_i}$, таких что для любого ограниченного борелевского подмножества $A \subset \Omega$ $\nu(A) < \infty$.
Сигма алгебра $\mathcal{M}$ на пространстве M индуцируется сигма алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами в $Conf(\Omega)$.

Введенные выше корр. функции можно использовать для изучения статистики маточидий вычисленных по случайным мерам. Рассмотрим линейную статистику:

$$\int_A f(x)\, d\nu = \sum_{x_i \subset A|_\xi} f(x_i), \text{ где } f(x) \text{ - некоторые ф-я.}$$

Вычислим производящую функцию: $\mathbb{E}\left(z \sum_i f(x_i)\right)$

Пусть $u(x) = 1 - e^{zf(x)}$, тогда

$$\mathbb{E}\left(\prod_i (1-u(x_i))\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbb{E}\left(\sum_{i_1<i_2\dots<i_n} \prod_{k=1}^{n} u(x_{i_k})\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathbb{E}\left(\sum_{x_{i_1}\dots x_{i_k} \text{ разные}} \prod u(x_{i_k})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{A^n} \rho_n(x_1 \dots x_n) \prod_i u(x_i)\, d\mu(x_i)$$

Детерминантный точечный процесс

Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, $R_n(x_1, \dots x_n)$ — корр. ф-ии некоторого точечного процесса. Пуст $\exists$ измеримое ядро $K: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, такое что

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \det_{1\le i,j\le n}(K(x_i, x_j))$$

Производящие ф-ии:

$$f_A(z) = \mathbb{E}(z^{\nu(A)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \rho_n(A^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \int_{A^n} R_n(x_1, \dots, x_n)\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \int_{A^n} \det_{1\le i,j\le n}(K(x_i, x_j))\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n) = \det(1 + (z-1)\mathbb{1}_A K \mathbb{1}_A)_{L^2(\mathbb{R},\mu)}$$

$$f_{\nu(A)}(z) = \mathbb{E}(z^{\nu(A)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\nu(A) = n) z^n \Rightarrow$$

$$E(n,A) = \mathbb{P}(\nu(A) = n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f_{\nu(A)}(z)}{\partial z^n}\Big|_{z=0} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\Big|_{z=1} \det(1 - z\mathbb{1}_A K \mathbb{1}_A)$$

Вероятность образование пустоты:

$$E(0,A) = \det(1 - \mathbb{1}_A K \mathbb{1}_A)_{L^2(\mathbb{R},\mu)}$$

В частности распределение x_{max}:

$$\mathbb{P}(x_{max} < a) = E(0, [a,+\infty)) = \det(\mathbb{1} - \mathbb{1}_{[a,+\infty)} K \mathbb{1}_{[a,+\infty)})_{L^2(\mathbb{R},\mu)}$$

Для линейной статистики имеем:

$$\mathbb{E}(e^{z\sum f(x_i)}) = \det(\mathbb{1} - Ku)_{L_2(A,\mu)}, \text{ где } u(x) = 1 - e^{zf(x)}$$

$$(Ku \circ f)(x) = \int_A K(x,y)u(y)f(y)\mu(dy).$$

Когда K определяет точечный процесс?

<u>Теорема</u>. (Сошников, Макки):

Пусть K такой, что
1) $K(x,y) = K(y,x)$ 2) $0 \le K(x,y) \le I$ на $L_2(\mathbb{R},\mu)$
3) $I_{[a,b]} K I_{[a,b]}$ - ядерный оператор для любых конечных $[a,b]$

Тогда K определяет единственный детерминантный точечный процесс с корр. функ. $R_n(x_1 \dots x_n) = \det\limits_{1 \le i,j \le n}(K(x_i,x_j))$,

Примеры.