ВВЕДЕНИЕ В ФИНАНСОВУЮ МАТЕМАТИКУ

А.В. Колесников

Содержание

1. Введение

Ниже перечислены сведения из теории меры и теории вероятностей, которые необходимо знать слушателям курса. Материал является стандартным и его можно найти в любом университетском курсе теории вероятностей (например, [?]). Частично он будет представлен во вводных лекциях по курсу теории вероятностей.

(1) Сигма-алгебры. Определение, примеры, базовые свойства.
(2) Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$.
(3) Меры. Мера Лебега. Вероятностные пространства.
(4) Измеримые множества. Случайные величины. Интеграл Лебега/математическое ожидание.
(5) Независимость.
(6) Абсолютная непрерывность меры относительно другой меры. Теорема Радона-Никодима.
(7) Характеристические функции (преобразование Фурье).
(8) Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.
(9) Условное математическое ожидание.
(10) Основные виды сходимости случайных величин и соотношения между ними.

2. Моделирование финансовых активов. Базовые факты из теории вероятностей.

2.1. **Моменты и кумулянты.** Всюду далее мы имеем дело со стандартным вероятностным пространством $(\Omega, P, \mathcal{F})$. Здесь Ω —множество, $\mathcal{F}$ — сигма-алгебра на нем, P — некоторая вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Предположим, нам дано вероятностное распределение $\rho(x)dx$ некоторой непрерывной случайной величины $\xi\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$, т.е.

$$P(\xi \le t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(x)dx.$$

Здесь $\rho(x)$ — неотрицательная функция, называемая функцией плотности распределения ξ, обладающая свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$.

Хорошо известны простейшие характеристики ξ:

(1) Математическое ожидание (среднее)

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx.$$

(2) Дисперсия

$$\sigma^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - \big(\mathbb{E}\xi\big)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\rho(x)dx - \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx\Big)^2.$$

В финансовой математике дисперсия также часто называется волатильностью. Параметр σ называется среднеквадратичным отклонением.

Обе характеристики являются примерами так называемых кумулянтов, которые в общем случае определяются следующим образом.

Определение 2.1. *Пусть $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\rho(x)dx$ — характеристическая функция (преобразование Фурье) с.в. ξ.*

Тогда кумулянтом n-го порядка называется величина

$$c_n = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n} \log\varphi(t)|_{t=0}.$$

Упражнение 2.2. *Докажите, что n-й кумулянт суммы независимых случайных величин есть сумма их кумулянтов.*

Конечно, кумулянты любого заданного порядка существуют не для всякого распределения. Для существования кумулянта n-го порядка необходимо существование первых n моментов m_k, $1 \le k \le n$. Существует общая комбинаторная формула, связывающая c_n с m_k, $1 \le k \le n$. Примеры для c_3, c_4:

$$c_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3,$$

$$c_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4.$$

Нормализованным кумулянтом n-го порядка называется величина c_n/σ^n. Нормализованные кумулянты третьего и четвертого порядка носят специальные названия.

(1) Skewness

$$s = \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^3}{\sigma^3}.$$

(2) Куртозис

$$k = \frac{(\xi - \mathbb{E}\xi)^4}{\sigma^4} - 3.$$

Skewness можно рассматривать как меру ассиметрии распределения. Интерпретация куртозиса несколько сложнее. Для нас важно следующее наблюдение.

Теорема 2.3. *Одномерные гауссовские распределения характеризуются равенством нулю кумулянтов порядка 3 и выше.*

Таким образом, куртозис можно рассматривать как меру отклонения от гауссовости. Распределения делят на так называемые "platycurtic" ($k < 0$) (равномерное ($k = -1.2$), полукруговое ($k = -1$)) и "leptocurtic" ($k > 0$) (симметричное показательное $\rho(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ($k = 3$)). Распределения с большим куртозисом характеризуются относительно толстым "хвостом".

Упражнение 2.4. *Докажите, что наименьшее значение куртозиса достигается на бернуллиевском распределении и найдите это значение.*

2.2. **Важные семейства распределений.** 1) Гауссовское/ нормальное распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ со средним a и дисперсией σ^2.

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

$$a = \mathbb{E}\xi,\ \sigma^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

Подробное обсуждение см. в курсе лекции по курсу теории вероятностей.

2) Лог-нормальное распределение.

Случайная величина ξ со значениями в $(0, +\infty)$ имеет лог-нормальное распределение, если ее логарифм имеет нормальное распределение.

Упражнение 2.5. *Докажите, что плотность распределения ξ имеет вид*

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\Big(-\frac{\log^2(\frac{x}{x_0})}{2\sigma^2}\Big).$$

Предметом изучения финансовой математики являются случайные процессы, моделирующие финансовые активы (акции, валюты, опционы и т.д.). Случайным процессом называется такое отображение

$$S\colon [0,T]\times\Omega\to\mathbb{R},$$

что $S(t,\cdot)$ есть случайная величина для каждого фиксированного момента времени $t\in[0,T]$. Удобно представлять $S(t,\omega)$ (другое обозначение $S_t(\omega)$ или просто S_t) как семейство случайных величин, проиндексированных индексом t.

В простейших классических финансовых моделях предполагается, что цена финансового актива S_t имеет гауссовские (независимые) приращения

$$S_{t+\Delta t}-S_t\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2\Delta).$$

В частности (в предположении, что S_0 детерминировано), сама величина $S_t=(S_t-S_0)+S_0$ является гауссовской. Это происходит, например, когда S_t моделируется винеровским процессом.

Часто предпочтительней оказывются модели в которых (как, например, в модели Блэка-Шоулза) предполагается, что приращения логарифма S_t имеют нормальное распределение

$$\log\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2\Delta).$$

Заметим, что относительная цена $\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}$ величина безразмерная, что часто является преимуществом по сравнению с абсолютными ценами. Поскольку для малых приращений

$$\log\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\sim\frac{S_{t+\Delta}-S_t}{S_t},$$

то малые приращения относительных цен имеют приблизительно гауссовские распределения.

2.3. **Центральная предельная теорема.** Напомним важную для дальнейшего центральную предельную теорему.

Теорема 2.6. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных с.в. с с $\mathbb{E}\xi_i^2<\infty$, $a=\mathbb{E}(\xi_i)$, $\sigma^2=\sigma^2(\xi_i)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}P\Big(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n-na}{\sqrt{n}\sigma}<t\Big)=\Phi(t),$$

где $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Стандартное доказательство сводится к изучению предела характеристических финкций случайных величин $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n-na}{\sqrt{n}\sigma}$.

Учитывая, что кумулянты гауссовского распределения равны нулю, следующее наблюдение является естественной иллюстрацией к ЦПТ.

Упражнение 2.7. *Пусть выполнены предположения ЦПТ. Докажите, что если существует m-й кумулянт c_m с.в. ξ_n, $m>2$, то последовательность m-х кумулянтов случайных величин $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n-na}{\sqrt{n}\sigma}$ сходится к нулю. Найдите порядок сходимости.*

2.4. **Безгранично делимые распределения.** Классы безгранично делимых и устойчивых распределений являются естественными классами распределений, которые могут выступать в роли предельных для сумм независимых с.в. Типичное устойчивое распределение не обладает элементарной функцией плотности. Кроме этого, это распределение с "тяжелым хвостом" — у него нет моментов порядка выше второго.

Определение 2.8. *Безгранично делимым распределением* ξ *на прямой называется такое распределение, что ее характеристическая функция* φ *удовлетворяет условию: для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует такая характеристическая функция* φ_n, *что* $\varphi = \big(\varphi_n\big)^n$.

Замечание 2.9. *Указанное свойство можно было бы сформулировать иначе: найдутся такие независимые, одинаково распределенные с.в.* ξ_i, *что распределение с.в.* $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ *совпадает с распределением* ξ. *Однако, существует некоторая разница в определениях. Не всегда на заданном вероятностном пространстве* Ω *можно найти такие случайные величины. Мы будем предполагать в дальнейшем, что наше вероятностное пространство достаточно богато и такие с.в. существуют.*

Приведем примеры безгранично делимых с.в. Во всех этих примерах соответствующая характеристическая функция $\varphi_n = \varphi_\xi^{1/n}$ имеет такую же форму, но отличается параметрами.

Пример 2.10. 1) *Вырожденное распределение*

$$\varphi(t) = e^{ita},\ \varphi_n(t) = e^{ita/n}$$

2) *Распределение Пуассона*

$$\varphi(t) = \exp\Big(\lambda(e^{it}-1)\Big),\ \varphi_n(t) = \exp\Big(\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)\Big)$$

3) *Нормальное распределение*

$$\varphi(t) = e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}},\ \varphi_n(t) = e^{it\frac{a}{n}-\frac{\sigma^2t^2}{2n}}$$

4) *Распределение Коши*

$$\varphi(t) = e^{ita-\theta|t|},\ \varphi_n(t) = e^{it\frac{a}{n}-\frac{\theta}{n}|t|}$$

5) *Гамма-распределение*

$$\varphi(t) = [1-(it/\theta)]^{-\lambda},\ \varphi_n(t) = [1-(it/\theta)]^{-\lambda/n}.$$

Теорема 2.11. *(Леви-Хинчин) Пусть* ξ — *безгранично делимая случайная величина. Тогда существует такая конечная неотрицательная мера* μ *и такое число* b, *что характеристическая функция* ξ *имеет вид*

$$\varphi(t) = \exp\Big(ibt + \int\Big[e^{itx} - 1 - it\frac{x}{1+x^2}\Big]\frac{1+x^2}{x^2}d\mu\Big).$$

Константа b *и мера* μ *в представлении Леви-Хинчина определена единственным образом.*

Другое (эквивалентное) представление характеристической функции носит название представления Леви

$$\varphi(t) = \exp\Big(ibt - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \int\Big[e^{itx} - 1 - it\frac{x}{1+x^2}\Big]\frac{1+x^2}{x^2}d\Lambda\Big), \tag{1}$$

где Λ — конечная неотрицательная мера с $\Lambda(\{0\}) = 0$. При $\Lambda = 0$ получаем гауссовское распределение.

Теорема 2.12. *Случайная величина ξ может быть пределом по распределению сумм вида $T_n = \sum_{i=1}^n \xi_{n,i}$, где $\{\xi_{n,i}\}$ — независимые, одинаково распределенные с.в. тогда и только тогда, когда она безгранично делима.*

Устойчивые распределения

Важным подклассом безгранично делимых распределений являются так называемые устойчивые распределения. Распределение называются устойчивым, если для любого n его характеристическая функция φ обладает свойством

$$\varphi^n(t) = e^{ib_nt}\varphi(a_nt),$$

где a_n, c_n — некоторые константы.

Любое устойчивое распределение является безгранично делимым, но не наоборот. Для устойчивых распределений существует представление, аналогичное формуле Леви-Хинчина.

$$\log\varphi = it\beta - c|t|^\alpha\big(1 + i\theta\frac{t}{|t|}G(t,\alpha)\big),$$

где $0 < \alpha \le 2, c \ge 0, |\theta| \le 1$ и $G(t,\alpha) = \tan\frac{\pi\alpha}{2}$ при $\alpha \ne 1$ $(G(t,\alpha) = \frac{2}{\pi}\ln|t|, \alpha \ne 1)$. Классическим примером устойчивых распределений являются симметрические устойчивые распределения (распределения Леви) с характеристической функцией

$$\varphi(t) = e^{-c|t|^\alpha},\ 0 < \alpha \le 2.$$

При $\alpha = 2$ получаем гауссовское распределение, $\alpha = 1$ — распределение Коши. Известен явный вид плотности распределения при $\alpha = 1/2$.

Теорема 2.13. *Устойчивые распределения и только они являются пределами по распределению сумм вида*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{C_n} - D_n,$$

где C_n, D_n — некоторые числа, а $\{X_i\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных с.в.

Упражнение 2.14. *Докажите, что функция $e^{-|t|^\alpha}$, $\alpha > 2$ не является характеристической функцией какого-либо распределения.*

Упражнение 2.15. *Докажите, что с.в. с характеристической функцией $e^{-c|t|^\alpha}$, $0 < \alpha < 2$ не имеет моментов второго порядка и выше.*

Упражнение 2.16. *Доказать, что равномерное распределение не является распределением суммы двух независимых одинаково распределенных с.в.*

Упражнение 2.17. *Доказать, что произведение двух безгранично делимых характеристических функций является безгранично делимой х.ф.*

Упражнение 2.18. *Показать, что биномиальное распределение не является безгранично делимым.*

Упражнение 2.19. *Найти явно меру Леви для устойчивых симметричных распределений и распределения Пуассона.*

Упражнение 2.20. *Доказать, что если φ — характеристическая функция, то $\exp(p(\varphi - 1))$ — безгранично делимая характеристическая функция.*

Завершая обсуждение типичных распределений, используемых в финансах, отметим, что первая финансовая модель, а также первое математическое описание того, что сейчас называется винеровским процессом, было предложено L. Bachelier в работе "Theory de la speculation" (1900). Это гауссовская модель. Работа Башелье осталась незамеченной, а популярность винеровский процесс прибрел после работы А. Эйнштейна (1905) о распространении тепла и объяснения феномена броуновского движения. В классической и наиболее известной модели Black & Scholes для моделирования основного (базового) финансового актива S_t используется лог-нормальная модель. Предложение использовать устойчивые распределения, вместо гауссовских, внес Б. Мандельброт. Одним из аргументов в пользу этого предложения является то обстоятельство, что на малых временных интервалах "редкие события" случаются чаще, чем в гауссовской модели (распределение имеет более тяжелый хвост). Кроме того, естественно ожидать, что распределения приращений $S_{t+\Delta_1} - S_t$, $S_{t+\Delta_2} - S_t$ для разных временных интервалов Δ_1, Δ_2 получаются друг из друга простой заменой масштаба (линейное преобразование). Это свойство, а также независимость приращений, возможно реализовать в рамках устойчивых распределений. Эта модель также не лишена недостатков. Устойчивые негауссовские распределения, как известно, имеют бесконечный второй момент, что не может иметь место в действительности. На больших временных интервалах приращения реальных финансовых активов все-таки больше похоже на гауссовские. Поэтому возникают модели типа "обрезанных устойчивых распределений", в которых исследователи пятаются найти подходящий "режим" между гауссовским и устойчивым случаем.

2.5. **Доказательство теоремы Леви-Хинчина.** [Для понимания этой части лекций надо знать соотношения между слабой сходимостью (сходимостью по распределению) и поточечной сходимостью характеристических функций, а также теорему Прохорова о компактности.]

Лемма 2.21. *Характеристическая функция безгранично делимой с.в. не имеет нулей на действительной оси.*

Доказательство. Пусть φ — безгранично делимая с.в. Тогда $|\varphi|^{2/n} = \varphi^{1/n} \cdot \overline{\varphi}^{1/n}$ — характеристическая функция. Перейдем к пределу $n \to \infty$. Функция $g(t) = \lim_n |\varphi|^{2/n}$ принимает значения 0 или 1. Так как $\varphi(0) = 1$, то $g = 1$ в некоторой окрестности нуля. Известно (этот факт мы оставим без доказательства), что если характеристические функции сходятся поточечно к функции, непрерывной в нуле, то предел сам является характеристической функцией, причем соответствующие случайные величины сходятся по распределению. Поэтому g — характеристическая функция предельной меры. Следовательно, g — непрерывная функция. В силу того, что $g(0) = 1$, то g тождественно равна 1 и f не может принимать нулевые значения. □

Теорема 2.22. *(Леви-Хинчин) Пусть ξ — безгранично делимая случайная величина. Тогда существует такая конечная неотрицательная мера μ и такое число b, что характеристическая функция ξ имеет вид*

$$\varphi(t) = \exp\Big(ibt + \int \big(e^{itx} - 1 - it\frac{x}{1+x^2}\big)\frac{1+x^2}{x^2} d\mu\Big).$$

Доказательство. В силу непрерывности $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int e^{itx}\, dF(x)$ и того факта, что φ не обращается в нуль, можно рассмотреть функцию на прямой $g(t) = \log \varphi(t)$. Функция g непрерывна и $g(0) = 0$. Заметим,что $\varphi^{1/n}(t) = e^{\frac{1}{n}g(t)}$. Действительно, функция $\xi = e^{\frac{1}{n}g(t)}$ удовлетворяет условиям $\xi^n = \varphi$ и $\xi(0) = 1$. Следовательно, $\xi = \varphi^{1/n}$ в силу непрерывности. Имеем

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} n(\varphi^{1/n}(t) - 1).$$

В силу того, что $\varphi^{1/n}$ является безгранично делимой, получаем следующее представление

$$n(\varphi^{1/n} - 1) = n\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_n,$$

где F_n — некоторая функция распределения. Проинтегрируем это выражение по t. Получим

$$\lim_n n\int_{\mathbb{R}} \bigl(1 - \frac{\sin xh}{xh}\bigr) dF_n = -\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} g(t)\ dt.$$

В силу того, что g непрерывна и $g(0) = 0$, получаем, что правая часть может быть сделана сколь угодно малой при малых h. Заметим также, что $1 - \frac{\sin xh}{xh} \geq \frac{1}{2}$ при $|xh| \geq 2$. Следовательно, для любого ε найдется такое h, что

$$n\int_{|x|\geq 2/h} dF_n \leq \varepsilon.$$

Далее, заметим, что существует константа c т.ч.

$$1 - \frac{\sin x}{x} \geq c\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Тогда, положив $h = 1$, получаем

$$n\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} dF_n \leq C.$$

для всех n и некоторой константы C. Из доказанных неравенств следует, что семейство мер

$$\mu_n(dx) = \frac{nx^2}{1+x^2} F_n(dx)$$

плотно. Перейдя с помощью теоремы Прохорова к подпоследовательности, получаем, что

$$\mu_{n_k} \to \mu,$$

слабо, где μ — некоторая конечная мера. Положим:

$$f(t,x) = \bigl(e^{itx} - 1 - it\frac{x}{1+x^2}\bigr)\frac{1+x^2}{x^2},\ x \neq 0, \quad f(0,t) = -\frac{t^2}{2}.$$

Заметим, что $f(x,t)$ непрерывна и ограничена. Поэтому можно перейти к пределу

$$g(t) = n\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_n = \lim_{n_k\to\infty} \int f(t,x)\ d\mu_{n_k} + \lim_{n_k} itn_k \int \frac{x}{1+x^2}\ F_{n_k}(dx).$$

Получаем

$$g(t) = \int f(t,x)\ d\mu + itb.$$

Предел

$$b = \lim_{n_k} n_k \int \frac{x}{1+x^2}\ F_{n_k}(dx)$$

существует в силу существования остальных пределов. Теорема доказана. □

Теорема 2.23. *Константа b и мера μ в представлении Леви-Хинчина определена единственным образом.*

Упражнение 2.24. *Выведите из теоремы формулу для представления Леви*
$$\varphi(t) = \exp\Big(ibt - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \int \big(e^{itx} - 1 - it\frac{x}{1+x^2}\big)\frac{1+x^2}{x^2}d\Lambda\Big), \tag{2}$$
где Λ — конечная неотрицательная мера с $\Lambda(\{0\}) = 0$.

2.6. **Корреляции и копулы.** Помимо вопроса о том, каким классом распределений следует моделировать финансовые активы, важным является вопрос о независимости/зависимости различных процессов. Речь может идти о разных финансовых активах $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$. Или о зависимостях внутри одного актива $S(t)$. Чрезвычайно важным является, например, вопрос, зависимы или нет приращения $S(t)$ на непересекающихся временных интервалах.

Во многих моделях ответ на этот вопрос пытаются дать, найдя коэффициент корреляции исследуемых процессов. Конечно, равенство нулю этого коэффициента означает независимость только для гауссовских процессов. Тем не менее, этого вполне бывает достаточно для практических целей, и на линейных методах, связанных изучением матриц ковариаций, построены некоторые классические теории.

Пример 2.25. Value at Risk. *Пусть дано n активов $S_1, \dots S_n$, каждый из которых обладает доходностью r_n, где r_n — некоторая случайная величина. Предположим, нам известны средние $\mu_i = \mathbb{E}r_i$ и матрица ковариаций $\sigma_{ij} = \mathbb{E}(r_ir_j) - \mu_i\mu_j$. Тогда матожидание доходности $r = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i$ портфеля $\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$ и его дисперсия (волатильность) равны*
$$\mu = \sum \lambda_i\mu_i$$
$$\sigma^2 = \sum_{i,j} \sigma_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$
Предоложим, что совместное распределение r_i нормально. Пусть нам задан некоторый уровень доверия α (например, $\alpha = 0,01$ или $\alpha = 0,05$). Тогда для соответствующей квантили q_α стандартного нормального распределения $P(r < \mu - \sigma q_\alpha) = \alpha$. Величина $\sigma q_\alpha - \mu$ называется value at risk. Ее интерпретация: это тот уровень убытков, которые с вероятностью α не будет превышен.

Пример 2.26. Теория портфелей Марковица. *В ситуации, описанной в предыдущем примере (предположение гауссовости не обязательно) ищется портфель $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ с наибольшей средней доходностью μ при уровне риска (волатильности), не превышающем заданного: $\sigma \le \sigma_0$.*

В приведенных выше примерах предполагается, что матрица ковариации активов постоянна, что на практике не выполняется. Более того, эмпирические корреляции сильно отличаются на разных временных интервалах. Пусть временной интервал $[t_0, t_0 + n\tau]$ разбит на n равных промежутков $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Эмпирическая корреляция $c_\tau(S_1, S_2)$ двух активов вычисляется по формуле
$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^n (S_1(t_{i+1}) - S_1(t_i))(S_2(t_{i+1}) - S_2(t_i))\Big) - \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=0}^n S_1(t_{i+1}) - S_1(t_i))\Big)\Big(\sum_{i=0}^n S_2(t_{i+1}) - S_2(t_i)\Big).$$
Она может сильно зависеть от величины τ. Простейший пример — автокорреляция, когда S_2 совпадает с S_1, но его приращения взяты со свдвигом на τ: $S_2(t) = S_1(t + \tau)$.

Как правило, при небольших значениях τ наблюдается небольшая положительная корреляция, но при больших τ она становится незначительной.

Кроме корреляций существует более тонкий инструмент измерения зависимости случайных величин. Всюду далее мы будем считать, что нам дана пара случайных величин (ξ, η) с совместной двумерной функцией распределения

$$H(x,y) = P(\xi \le x, \eta \le y)$$

и маргинальными одномерными функциями распределения

$$F(x) = P(\xi \le x),\ G = P(\eta \le y).$$

Определение 2.27. *Функция*

$$C\colon [0,1]\times[0,1] \mapsto [0,1]$$

называется копулой, если она удовлетворяет следующим условиям.

(1)

$$C(u,0) = 0 = C(0,v)$$

(2)

$$C(u,1) = u,\ C(1,v) = v$$

(3) *Для любых* $u_1 \le u_2, v_1 \le v_2$

$$C(u_1,v_1) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_2,v_2) \ge 0.$$

Другими словами, копулой называется функция распределения некоторой вероятностной меры с равномерными маргиналами.

Упражнение 2.28. *Докажите, что функции*

$$\max(u+v-1,0),\ \min(u,v),\ uv.$$

являются копулами.

Пример 2.29. *Примеры копул*

$$C(u,v) = \min(u,v)^{\theta}(uv)^{1-\theta},\ 0 \le \theta \le 1$$

$$C(u,v) = \frac{uv}{u+v-uv}$$

Упражнение 2.30. *Покажите, что* $C(u,v) = u, 0 \le u \le v/2 \le 1/2$, $C(u,v) = v/2, 0 \le v/2 < u < 1 - v/2$, $C(u,v) = u+v-1, 1/2 \le 1-v/2 \le u \le 1$ *— копула. Приведите пример некоррелированных с.в., одна из которых точно выражается через другую.*

Упражнение 2.31. *Докажите, что любая копула удовлетворяет неравенствам Фреше-Хёффдинга*

$$\max(u+v-1,0) \le C(u,v) \le \min(u,v).$$

Упражнение 2.32. *Докажите, что копула C удовлетворяет неравенствам*

$$|C(u_1,v_1) - C(u_2,v_2)| \le |u_1-u_2| + |v_1-v_2|.$$

Теорема 2.33. *(A. Sklar, 1959) Пусть H — совместное распределение пары с.в. (ξ,ν) с распределениями $(F(x),G(y))$. Тогда существует копула C со свойством*

$$H(x,y) = C(F(x),G(y)).$$

Если F,G — непрерывные функции, то C единственна.

Наоборот, если C — копула, а F, G — функции распределения некоторых случайных величин, то $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ — совместное двумерное распределение с маргиналами F, G.

Теорема Скляра позволяет сконструировать разнообразные примеры копул с помощью произвольных двумерных распределений. Например, с помощью нормального распределения можно сконструировать семейство нормальных копул (гауссовских) копул.

Замечание 2.34. *С.в. ξ, η независимы тогда и только тогда, когда $C(u, v) = uv$.*

Аналогично определяются (и обладают сходными свойствами) копулы для n одномерных маргиналов.

Упражнение 2.35. *Найти все такие копулы $C(u, v)$, для которых C является многочленом первой степени от u для любого фиксированного v.*

Упражнение 2.36. *Найти все такие симметричные ($C(u, v) = C(v, u)$) копулы $C(u, v)$, для которых C является многочленом второй степени от u для любого фиксированного v.*

Теорема 2.37. Архимедовы копулы. *Пусть φ – непрерывная, строго убывающая функция из $[0, 1]$ в $[0, +\infty)$, причем $\varphi(1) = 0$. Пусть $\varphi^{[-1]}$ — ее* **псевдообратная** *функция. $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}(t), 0 \leq t \leq \varphi(0)$, $\varphi^{[-1]} = 0, t \geq \varphi(0)$. Тогда*

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{3}$$

копула тогда и только тогда, когда φ выпукла.

Упражнение 2.38. *Докажите теорему 2.37. Указания: 1) докажите, что выпуклость φ равносильна выпуклости $\varphi^{[-1]}$, 2) докажите, что (3) является копулой тогда и только тогда, когда $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$, $u_1 \leq u_2$, 3) докажите, что последнее свойство равносильно выпуклости $\varphi^{[-1]}$.*

Упражнение 2.39. *(Kendall's tau) Пусть (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — два независимых одинаково распределенных случайных вектора. Докажите, что коэффициент τ, равный*

$$P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

выражается через копулу распределения (X_i, Y_i) по формуле

$$\tau = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Упражнение 2.40. *Пусть $C_1(u, v)$, $C_2(u, v)$ — две копулы. Докажите, что функция*

$$C(u, v) = \int_0^1 \partial_t C_1(u, t) \partial_t C_2(t, v) dt$$

является копулой.

Копулы применяются в финансах для моделирования совместных распределений финансовых активов S_i, $1 \leq i \leq n$. Для многих практических задач необходимо знать совместное распределение $(S_1, \dots, S_n)$. Возможна ситуация, когда эмпирически его описать затруднительно или невозможно. Тогда совместное распределение можно смоделировать с помощью копулы. Конечно, имеется большой произвол в выборе копулы. Здесь могут сыграть роль дополнительные соображения. Например, если известен коэффициент корреляции, то можно выбрать гауссову копулу с этим коэффициентом.

2.7. Основные модельные процессы. Винеровский процесс.

Определение 2.41. *Случайный процесс W_t, $t \in [0,T]$ называется винеровским процессом (броуновским движением), если он обладает следующими свойствами:*

1) *Случайный вектор $(W_{t_1}, \cdots, W_{t_n})$, $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T$ имеет гауссовское распределение и $W_0 = 0$ п.н.*
2)
$$\mathbb{E}W_t = 0, \ \mathbb{E}\big(W_t W_s\big) = t \wedge s$$
3) *Траектории $t \to W_t(\omega)$ непрерывна для всех $\omega \in \Omega$.*

Замечание 2.42. *Винеровский процесс является* **гауссовским** *процессом (т.е., процессом с гауссовскими конечномерными распределениями) с непрерывными траекториями.*

Теорема 2.43. *Винеровский процесс является процессом с независимыми приращениями, т.е. случайные величины*
$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \quad 0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T$$
независимы. Кроме этого, выполено свойство
$$\mathbb{E}W_t = 0, \quad D(W_t - W_s) = t - s, \quad s \le t. \tag{4}$$

Обратно, гауссовский процесс с непрерывными траекториями и независимыми приращениями является винеровским, если выполнено свойство (4) и $W_0 = 0$.

Упражнение 2.44. *Докажите теорему (2.43).*

Упражнение 2.45. *Пусть W_t — винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы являются винеровскими*
$$-W_t, \ tW_{1/t}, \ W_{t+s} - W_s, \ \frac{1}{a}W_{a^2t}, \ W_{1-t} - W_1, \quad s > 0, \ a > 0.$$

Весьма интересна история появления винеровского процесса в физике и математике. В 1828 г. ботаник Р. Броун описал явление, впоследствие названное броуновским движением: хаотическое движение пыльцы в жидкости. Оказалось, что это движение вызвано ударами молекул. Первое описание физической модели этого явления было предложено А.Эйнштейном (1905) и М.Смолуховским (1906). Работы Эйнштейна привели к оценке числа Авогадро (Ж.-Б. Перрен, Нобелевская премия, 20-е гг.).

Долгое время Эйнштейн считался пионером в физико-математической теории броуновского движения, но примерно 50 лет спустя была переоткрыта работа Л. Башелье "Théorie de la spéculation", написанная в 1900 г. В этой работе Башелье фактически применил винеровский процесс к описанию ценных бумаг на французском рынке. Его работа осталось незамечена до конца 50-х годов.

Первое строгое математическое доказательство существования винеровского процесса получил Норберт Винер в 1922-23 гг. Его конструкция основывалась на довольно абстрактных методах (интеграл Даниеля) и была весьма тяжелой. Упрощение было достигнуто позже. Стандартное доказательство основано на теореме Колмогорова о построении меры по конечномерным распределениям и его же теореме о существовании непрерывной модификации процесса. Поль Леви предложил доказательство, основаннное на сходимости случайных рядов (фактически, на разложении процесса в ряд Фурье со случайными коэффициентами).

Траектории винеровского процесса являются весьма нерегулярными функциями. Как мы скоро убедимся, они почти нигде не дифференцируемы (хотя и непрерывны). Простейшим свойством "нерегулярности"является следующее.

Теорема 2.46. *Пусть $s = t_{0,n} < t_{1,n} < \cdots < t_{i_n,n} = t$ — последовательность разбиений отрезка $[s,t]$ с $\lim_n \max_i |t_{i,n} - t_{i-1,n}| = 0$. Тогда с.в.*

$$\xi_n = \sum_{i=0}^{n} \big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2$$

обладает свойством: $\lim_n \xi_n = t - s$ по вероятности.

Доказательство. Найдем $\mathbb{E}\xi_n$, $D\xi_n$.

$$\mathbb{E}\xi_n = \sum_i \mathbb{E}\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{i,n}\big)^2 = \sum_i (t_{i+1,n} - t_{i,n}) = t - s.$$

В силу независимости приращений

$$D(\sum_i \big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2) = \sum_i D\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2 = \sum_i \mathbb{E}\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^4 - \big(\mathbb{E}\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2\big)^2.$$

Воспрользуемся тем, что $\mathbb{E}\eta^4 = 3\sigma^4$ для $\eta \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Получаем

$$D(\sum_i \big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2) = 2\sum_i (t_{i+1,n} - t_{i,n})^2 \le \max_i |t_{i+1} - t_i| \sum_i (t_{i+1,n} - t_{i,n}) = \max_i |t_{i+1} - t_i|(t-s).$$

Очевидно, последняя величина стремится к нулю. Из сходимости $D(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^2$ к нулю следует сходимость к нулю по вероятности с.в. $\xi_n - \mathbb{E}\xi_n$. □

Напомним, что вариацией функции f на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$var_{[a,b]}(f) = \sup \sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,$$

где супремум берется по всем возможным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. В случае, если f имеет интегрируемую производную на $[a,b]$, то

$$var_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Лемма 2.47. *Докажите, что если f непрерывна и $var_{[a,b]}(f) < \infty$, то $\lim_n \sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 = 0$ при стремлении к нулю максимума отрезков разбиения.*

Следствие 2.48. *С вероятностью 1 траектории винеровского процесса имеют бесконечную вариацию на $[a,b]$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.46. Найдем почти всюду сходящуюся подпоследовательность $\xi_{n_m}(\omega) \to t - s$. Но любая траектория $t \to W_t(\omega)$, для которой это выполнено, имеет неограниченную вариацию по предыдущей лемме. □

Описание движения частиц, моделируемое винеровским процессом, неразрывно связано уравнением в частных производных, называмым уравнением теплопроводности (диффузии).

Теорема 2.49. *Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная вместе со своими производными до порядка 2 включительно. Тогда функция*

$$u(t,x) = \mathbb{E}(f(x + W_t))$$

является решением уравнения теплопроводности (heat equation)

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx} \tag{5}$$

с начальным условием $u(0,x) = f(x)$.

Упражнение 2.50. *Докажите теорему (4.32) прямым вычислением.*

Упражнение 2.51. *Каким уравнениям в частных производных удовлетворяют следующие функции?*

$$u(t,x) = \mathbb{E}(f(x + aW_t + bt))$$

$$u(t,x) = \mathbb{E}(f(xe^{W_t - \frac{1}{2}t})).$$

Здесь a, b — некоторые постоянные.

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int f(xe^{-t} + y\sqrt{1-e^{-2t}})e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Уравнение теплопроводности допускает естественную интерпретацию как описание распространения тепла в телах и процесса диффузии.

Рассмотрим узкий длинный цилиндр, направленный вдоль оси x, с жидкостью и взвесью мелких частиц в ней, движущимся по законам винеровского процесса. Пусть $f(x,t)\Delta x$ — число частиц, заключенных в участке цилиндра между x и $x + \Delta x$ (f можно интерпретировать как плотность) в момент t. Число частиц в этом участке через малый период времени Δt равно

$$f(x, t + \Delta t)\Delta x = \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} f(x - s, t)p_{\Delta t}(s)ds.$$

Действительно, это следует из того, что частица, находящаяся на расстоянии s от $[x, x + \Delta x]$, попадает туда через промежуток времени Δt с вероятностью $\approx \Delta x \cdot p_{\Delta t}(s)$. Усредняя по вероятности, получаем среднее число частиц. Разлагая в ряд по t выражение в левой части и в ряд по x выражение в правой части, получаем

$$f(x,t) + \Delta t f_t(t,x) + \cdots = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(x,t) - sf_x(x,t) + \frac{1}{2}s^2 f_{xx}(x,t) + \cdots\Big)p_{\Delta t}(s)ds.$$

Принимая во внимание, что $\int_{-\infty}^{\infty} sp_{\Delta t}(s)ds = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} s^2 p_{\Delta t}(s)ds = \Delta t$, получаем искомое уравнение $f_t(t,x) = \frac{1}{2}f_{xx}(t,x)$.

2.8. **Процессы Леви.** Пуассоновским процессом π_t с параметром λ на $[0, \infty)$ (называемом интенсивностью) будем называть такой процесс с независимыми приращениями и непрерывными справа траекториями, что $\pi_t - \pi_s$, $s < t$ имеет распределения Пуассона с параметром $\lambda(t - s)$, π_0 =0.

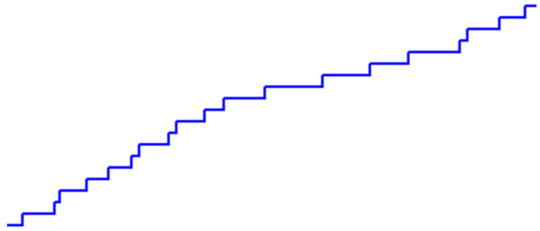
Пуассоновский процесс является дискретным. Его траектории представялют собой возрастающие скачками функции. Пуассоновский процесс используется для моделирования различных явлений с дискретной природой. Классическое приложение пуассоновского процесса: π_t равно числу телефонных звонков, поступивших на телефонную станцию до момента времени t.

Для построения пуассоновского процесса используется относительно простая конструкция. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных показательных величин X_k с параметром λ. Положим $T_n = \sum_{k=1}^n X_i$.

Теорема 2.52. *Положим:*

$$\pi_t = \max\{n : T_n \le t\}.$$

Тогда π_t — пуассоновский процесс с параметром λ



Несмотря на разницу в свойствах, оба процесса принадлежат одному и тому де классу — процессам Леви.

Определение 2.53. *Процесс X_t, $t \geq 0$ называется процессом Леви, если*

- *Траектории X_t почти всюду напрерывны справа и имеют пределы слева*
- $P(X_0 = 0) = 1$
- *Для $t < s$ распределение $X_t - X_s$ совпадает с распределением X_{t-s}*
- *Если $0 \leq s \leq t$, то распределение $X_t - X_s$, не зависит от $\{X_u, u \leq s\}$.*

Из определения сразу вытекает, что распределение X_t безгранично делимо для всех $t \geq 0$. Используя представление Хинчина -Леви

$$\mathbb{E}e^{i\theta X_1} = e^{-\Phi(\theta)},$$

где

$$\Phi(\theta) = \exp\Big(ib\theta + \int\Big[e^{i\theta x} - 1 - i\theta\frac{x}{1+x^2}\Big]\frac{1+x^2}{x^2}d\mu\Big)$$

из свойств процесса Леви легко выводится следующее свойство

$$\mathbb{E}e^{i\theta X_1} = e^{-t\Phi(\theta)},$$

В частности, для процесса Пуассона

$$\mathbb{E}e^{i\theta\pi_t} = e^{-\lambda t(1-e^{i\theta})}$$

для винеровского процесса

$$\mathbb{E}e^{i\theta\pi_t} = e^{-\frac{t}{2}\theta^2}.$$

Ниже приведены примеры лругих процессов Леви.

Пример 2.54. *Составной процесс Пуассона. Рассмотрим процесс Пуассона π_t и последовательность независимых одинаково распределенных с.в. ξ_i, независимых от π_t. Положим*

$$N_t = \sum_{i=1}^{\pi_t}\xi_i.$$

Пример 2.55. *Обратный гауссовский процесс*

$$\tau_s = \min\{t : W_t \geq s\}.$$

Позже мы выясним, что этот процесс является устойчивым с показателем $1/2$.

Пример 2.56. *Симметричный устойчивый процесс*

$$\Psi(\theta) = c|\theta|^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 2.$$

В частности, процесс Коши

$$\Psi(\theta) = c|\theta|.$$

В разложении Леви гауссовская компонента отвечает за непрерывную часть траектории, а компонента, определяемая мерой Λ, за скачки.

Теорема 2.57. *Процесс Леви X_t имеет обладает разложением*
$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)},$$
где $X_t^{(1)} = at + bW_t$ — броуновское движение со сносом, $X_t^{(2)}$ — составной процесс Пуассона, $X_t^{(2)}$ — квадратично интегрируемый мартингал со счетным числом скачков на каждом конечном интервале.

Замечание 2.58. *Как мы уже видели, с винеровским процессом связан дифференциальный оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Для общего процесса Леви имеются аналоги уравнения диффузии. Основным отличием от винеровского процесса является наличие нелокальных (интегральных) слагаемых, которые можно интерпретировать как дробные производные (см. A.E. Kyprianou, Introductory Lectures on Fluctuations of Levy Processes with Applications, раздел 4).*

2.9. **Дробное броуновское движение.** Еще одним конкурентом броуновскому движению является так называемое дробное броуновское движение, также обладающее некоторым самоподобием. В отличие от предыдущих примеров, это процесс с коррелированными приращениями.

Определение 2.59. *Дробным броуновским движениме B_t^H, где $0 < H < 1$ — так называемый параметр Хёрста, называется гауссовский процесс с $B_0^H = 0$ и ковариационной функцией*
$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Основные свойства:

- При $H = 1/2$ получаем обычное броуновское движение.
- Самоподобие: при $a > 0$ распределение $a^{-H} B_{at}^H$ совпадает с распределением B_t
- Траектории непрерывны по Гёльдеру с коэффициентом $\lambda < H$.
- Приращения на непересекающихся интервалах положительно коррелированы при $H > 1/2$.
- Приращения на непересекающихся интервалах отрицательно коррелированы при $H > 1/2$.
- Интегральное представление (Mandelbrot, Van Ness)
$$B_t^H = \frac{1}{C(H)} \int_{\mathbb{R}} (t-s)_+^{1/2} - (-s)_+^{H-1/2} dW_s,$$
$$C(H) = \Big[\int_0^{+\infty} \Big((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2}\Big) ds + \frac{1}{2H}\Big]^{1/2}.$$

3. Теория арбитража для дискретного времени

3.1. **Опционы и другие ценные бумаги.** На фондовом рынке существуют различные типы ценных бумаг. Нас будут интересовать следующие: **облигации (англ. bond), акции (stock) и опционы (option)**. Все эти бумаги моделируются случайными процессами на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и временном интервале $[0, T]$ (дискретном или континуальном).

Облигация моделируется, как правило, детерминированным процессом B_t. Она представляет собой величину, привязанную к некоторой финансовой единице, которую на коротком периоде времени удобно считать постоянной (например, некоторой валюте). Как правило, владелец облигации получает от нее доход в виде процента по фиксированной ставке $r > 0$. В этом случае номинальная цена облигации моделируется функцией $B_t = e^{rt}$, $0 \leq t \leq T$.

Акция (актив), напротив, моделируется случайным процессом S_t. В качестве S_t могут выступать случайное блуждание, винеровский процесс или функции от них.

Опционом называется производный финансовый инструмент (derivative), связанный с базовым активом, в качестве которого у нас всегда будет выступать акция S_t. Он характеризуется параметрами T — временем реализации (expiration), страйком (strike) K и типом. Мы рассмотрим два простейших типа - call (на покупку) и put (на продажу).

Опцион типа call дает его владельцу право приобрести по цене K акцию S_t в момент времени T. Аналогично, опцион типа put дает его владельцу право продать по цене K акцию S_t в момент времени T. Опцион сам является торгуемой ценной бумагой. Нетрудно понять, что в момент времени T цена опциона call равна

$$\max(S_T - K, 0),$$

а цена опциона put равна

$$\max(K - S_T, 0).$$

Обычно опционы обозначаются C_t (для типа call) и P_t (для типа put). Нетривиальной задачей (как в практическом, так и теоретическом смысле) является задача определения цены опциона в любой момент $t_0 < T$ как функции величин K, T, r и траектории случайного процесса S_t на отрезке $[0, t_0]$. Одно из возможных решений представлено формулой Блэка-Шоулза (Black-Scholes) , которую можно выводить разными способами.

Замечание 3.1. *Мы будем рассматривать только европейские опционы, которые (в отличие от американских) можно реализовать только в момент T.*

Замечание 3.2. *Считается, что участник (инвестор, игрок) торгов на фондовом рынке может приобретать и продавать имеющиеся ценные бумаги в любом количестве в любой момент времени $0 \leq t \leq T$. При этом покупка (операция типа short) не обязана предшествовать продаже (операция типа long)*

3.2. **Одношаговая биномиальная модель.** Мы приступаем к обсуждению моделей, основанных на принципах **отсутствия арбитража** и **риск-нейтральности**. Начнем со следующего простейшего примера.

Предположим, что в состоянии "сегодня" мы имеем акцию ценой $S_0 = 10\$$. При этом "завтра" для цены S_1 имеются две возможности: $S_1 = 7.5$ с вероятностью q, либо $S_1 = 20$ с вероятностью $1 - q$. Какова "риск-нейтральная" вероятность, т.е., вероятность, при которой средняя цена акции постоянна? Из уравнения

$$20q + 7.5(1 - q) = 10.$$

получаем $q = 0.2$.

Какова "честная" цена опциона H типа "call" со страйком 15\$? Естественно предположить, что на должна вычисляться по формуле $\pi(H) = 1 = 0.2 * 5$, потому что с вероятностью 0.2 держатель опциона заработает 5\$, в противном случае 0.

Мы покажем, что в противном случае возникает возможность арбитража, т.е. стратегии, гарантирующей безрисковый доход. Построим портфель, т.е. комбинацию ценных бумаг

$$\eta + \theta S,$$

дублирующий цену опциона. Здесь η — деньги, а θ — количество акций. Коэффициенты η и θ определим из уравнений

$$\eta + 20\theta = 5, \quad \eta + 7.5\theta = 0.$$

Получаем $\eta = -3$, $\theta = 0.4$.

Хеджинговая стратегия: в момент 0 продать опцион и занять 4\$, чтобы проинвестировать их в $0,4$ акции.

Упражнение 3.3. *Убедитесь, что 1) при любых возможностях баланс держателя портфеля будет равен* 0 *"завтра", 2) если цена опциона не совпадает с* 1 *\$, т.е. возможна стратегия, гарантирующая безрисковый доход (арбитраж).*

Приведенные рассуждения нетрудно обобщить на общий случай (1-шаговая биноминальная модель).

Предположим, что S (цена акции) в состоянии "завтра" принимает два значения

$$S_a = (1+a)S_0$$

$$S_b = (1+b)S_0$$

Важным параметром является **дисконтирующий множитель** (discount factor) $\beta < 1$. Он означает, что 1 \$, будучи инвестированным (например, в государственые облигации) сегодня, даст завтра β^{-1} \$.

Аналогично тому, как это было сделано выше, мы вычисляеи риск нейтральную вероятность состояния b завтра:

$$q = \frac{\beta^{-1}S_0 - S_a}{S_b - S_a}$$

Заметим, что $0 < q < 1$ тогда и только тогда, когда $a < r < b$, $\beta = \frac{1}{1+r}$.

Производный финансовый инструмент (например, опцион) обозначим через H

Наша задача: составить портфель V, имеющий одинаковую ценность с H. На нулевом шаге портфель имеет вид

$$V_0 = \eta + \theta S_0,$$

где η — "деньги", θ — количество акций. С учетом дисконтирования и изменения цены акции S, стоимость такого портфеля завтра равна

$$\frac{\eta}{\beta} + \theta S_1 = \frac{V_0 - \theta S_0}{\beta} + \theta S_1.$$

Отсюда получаем основное уравнение

$$\beta H = V_0 + \theta(\beta S_1 - S_0).$$

Из него вытекают формулы для η, θ, V_0:

$$\theta = \frac{H_b - H_a}{S_b - S_a}$$

$$V_0 = \beta \mathbb{E} H = \beta\Big(\frac{\beta^{-1}S_0 - S_a}{S_b - S_a}H_b + \frac{S_b - \beta^{-1}S_0}{S_b - S_a}H_a\Big)$$

$$\eta = \frac{1}{b-a}\Big(\beta(1+b)H_a - (1+a)H_b\Big).$$

Пример 3.4. *Формула для опциона call*

$$H = (S_1 - K)_+,$$

при условии $(1+a)S_0 < K < (1+b)S_0$:

$$H_a = 0, \quad H_b = (1+b)S_0 - K,$$

$$H_0 = \frac{1}{1+r}\Big(\frac{r-a}{b-a}\Big)\big((1+b)S_0 - K\big).$$

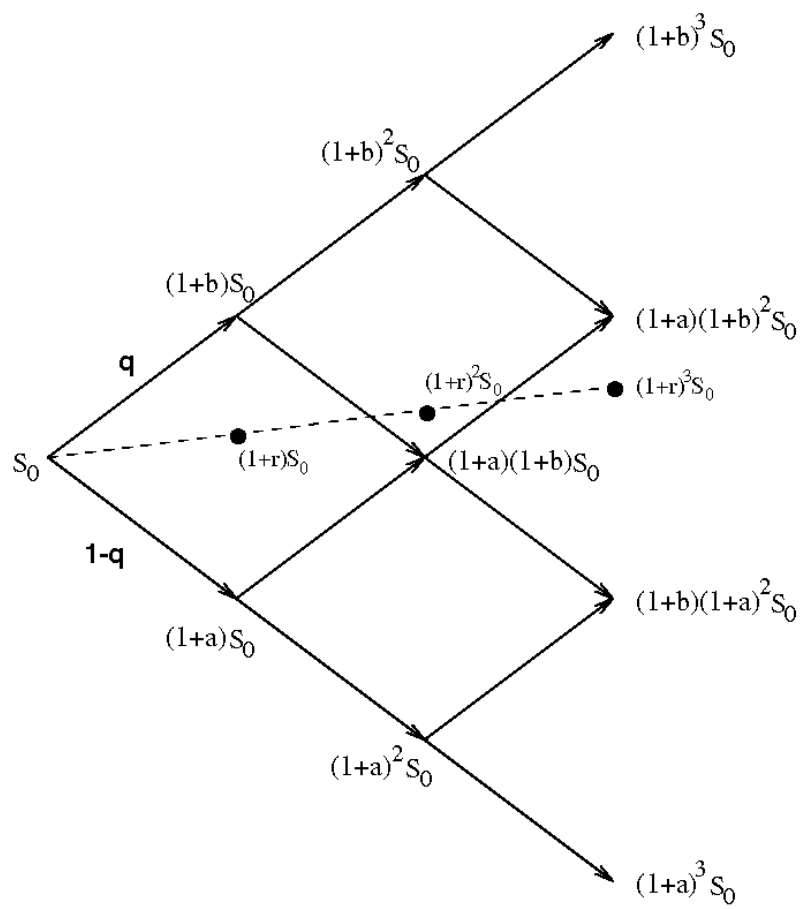


Figure 1.3: Event tree for the CRR model

3.3. **Многошаговая биномиальная модель и формула CRR.** Модель получается простой итерацией одношаговой модели. Для иллюстрации приведен соответствующий рисунок из книги R.J. Elliot, P.E. Kopp "Mathematics of financial markets". Позже мы докажем, что результат описывается формулой **CRR** (Cox-Ross-Rubinstein) и изучим, что происходит с ней в пределе.

3.4. **Элементы теории мартингалов (дискретное время).** Пусть дана фильтрация на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, т.е. последовательность вложенных σ-алгебр

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \ldots \subset \mathcal{F}.$$

Последовательность случайных величин (процесс с дискретным временме) X_n называется **согласованным**, если каждая с.в. X_n измерима относительно $\mathcal{F}_n$ и **предсказуемым**, если каждая с.в. X_n измерима относительно $\mathcal{F}_{n-1}$.

Определение 3.5. *Процесс $M_n \in L^1(P)$ называется мартингалом, если*

(1) M_n *согласован*
(2) $M_n \in L^1(P)$
(3) $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$,

Если последнее условие заменено на неравенство $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq M_{n-1}$, то процесс называется субмартингалом.

Пример 3.6. *Пусть $M_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где ξ_i — независимые случайные величины с конечным первым моментом и нулевым средним. Тогда M_n — мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_n$, порожденой с.в. $\xi_1, \cdots, \xi_n$.*

Пример 3.7. *Пусть M — случайная величина с конечным первым моментом. Тогда $M_n = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$ — мартингал.*

Упражнение 3.8. *Пусть M_n — мартингал, f — выпуклая функция. Докажите, чтоесли $\mathbb{E}|f(M_n)| < \infty$, то $f(M_n)$ — субмартингал. Указание: воспользуйтесь неравенством Йенсена.*

Определение 3.9. *(Дискретным)* **стохастическим интегралом** $\int_0^n X dM$ *(другое обозначение $X \star M$) по процессу M_n от процесса X_n называется процесс*

$$(X \star M)_n = \sum_{k=1}^{n} X_k (M_k - M_{k-1}).$$

Мы считаем, что $M_0 = 0$, $(X \star M)_0 = 0$.

Теорема 3.10. *Пусть X_n — предсказуемый процесс, M_n — мартингал, $X_n, M_n \in L^2(P)$ для всех n. Тогда $X \star M$ — мартингал. Если M_n — субмартингал, а X_n неотрицателен, то $X \star M$ — субмартингал.*

Упражнение 3.11. *Докажите теорему 3.10.*

Определение 3.12. *Случайная величина τ со значениями в $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ называется марковским моментом, если для любого n событие $\{\tau \leq n\}$ принадлежит $\mathcal{F}_n$.*

Типичным марковским моментов является первое значение n, когда согласованный процесс X_n принял значение в некотором множестве A.

Теорема 3.13. *Пусть M_n — (суб)мартингал, а τ — марковский момент. Тогда процесс*

$$M_n^\tau := M_{\tau \wedge n}$$

является (суб)мартингалом.

Доказательство. Проверьте, что $M^\tau = M \star X$, где $X_n = I_{n \leq \tau}$ и воспользуйтесь теоремой 3.10. □

Упражнение 3.14. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых стандартных гауссовских с.в., $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Докажите, что $X_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \exp\Bigl(\frac{S_n^2}{2(n+1)}\Bigr)$ — мартингал относительно потока $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$.*

(Мартнгалы с непрерывным временем) Пусть задан винеровский процесс W_t и поток σ-алгебр, им порожденный $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$. Мартингалом M_t называется процесс со свойствами: M_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$, $\mathbb{E}|M_t| < \infty$, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$.

Упражнение 3.15. *Докажите, что процессы $W_t^2 - t, e^{W_t - \frac{1}{2}t}$ являются мартингалами.*

Упражнение 3.16. *Найдите многочлен(ы) третьей и (или) четвертой степени от винеровского процесса* $W_t^4 + a(t)W_t^3 + b(t)W_t^2 + c(t)W_t + d(t)$, *являющийся мартингалом.*

Упражнение 3.17. Неравенство Дуба. *Пусть* X_n *— дискретный неотрицательный субмартингал,* $n \in \{0, 1, \cdots, N\}$. *Докажите, что*

$$\mathbb{E}\big(\max_{0\le n\le N} X_n^2\big) \le 4\mathbb{E}X_N^2.$$

Указание: для числовой неотрицательной последовательности x_n *докажите неравенство*

$$\overline{x}_N^2 + 4\sum_{n=0}^{N-1} \overline{x}_n(x_{n+1} - x_n) \le 4x_N^2,$$

$\overline{x}_n = \max_{0\le i\le n} x_i$.

3.5. **Выпуклые множества. Теорема об отделимости.** Теорема Хана-Банаха является одним из важнейших результатов функционального анализа и одной из классических теорем математики вообще. Нам потребуется весьма слабая (конечномерная) форма этой теоремы, обычно называемая теоремой об отделимости.

Теорема 3.18. *Пусть* K *— выпуклое замкнутое множество,* L *— линейное подпространство в* $\mathbb{R}^n$. *Если* K *и* L *не пересекаются, то существует линейная функция* l *на* $\mathbb{R}^n$, *равная нулю на* L *и положительная на* K.

3.6. **Первая фундаментальная теорема.** Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с семейством вложенных σ-алгебр $\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_N$. Считаем, что $\mathcal{F}$ — тривиальная σ-алгебра, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Пусть задан согласованный процесс S_n, моделирующий финансовый актив (акцию) и предсказуемый процесс

$$B_n > 0,$$

моделирующий безрисковый актив (облигацию). Стандартный пример:

$$B_n = (1+r)^n.$$

Будем называть портфелем следующую линейную комбинацию

$$V_n = \alpha_n S_n + \beta_n B_n,$$

где α_n, β_n — некоторые предсказуемые случайные процессы.

Определение 3.19. *Портфель называется самофинансируемым, если изменения его цены определяются только начальным вложением* V_0 *и колебаниями курса (без каких-либо дополнительных вложений).*

Посмотрим, каким ограничениям удовлетворяет самофинансируемый портфель. Самофинансируемость означает, что переформирование портфеля с $(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ на (α_n, β_n) обязано удовлетворять

$$\alpha_{n-1}S_{n-1} + \beta_{n-1}B_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}.$$

Эквивалентно:

$$V_n = \alpha_n S_n + \beta_n B_n$$

удовлетворяет

$$\Delta V_n = \alpha_n \Delta S_n + \beta_n \Delta B_n,$$

что равносильно тому, что V представляется в виде стохастического интеграла

$$V_n = V_0 + (\alpha \star S)_n + (\beta \star B)_n.$$

Определение 3.20. *Будем говорить, что на рынке существует возможность арбитража, если существует такой самофинансируемый портфель V_n, что*

(1) $V_0 = 0$
(2) $V_N \geq 0$, *почти всюду*
(3) $P(V_N > 0) > 0$

Определение 3.21. *Меры P и Q называются эквивалентными, если из соотношения $P(A) = 0$ следует $Q(A) = 0$, а из $Q(A) = 0$ следует $P(A) = 0$.*

Из теоремы Радона-Никодима вытекает, что эквивалентность мер P, Q равносильно существованию измеримой положительной п.в. функции g со свойством $P = g \cdot Q$ (последнее означает, что $P(A) = \int_A g dQ$ для любого измеримого множества A).

Теорема 3.22. *(Первая фундаментальная теорема для конечных вероятностных пространств). Предположим, что*

$$B_n = 1$$

и вероятностное пространство Ω состоит из конечного числа элементов. Отсутствие арбитража равносильно существованию меры Q со свойствами

(1) *Q эквивалентна P*
(2) *S_n является мартингалом относительно Q.*

Замечание 3.23. *В одну сторону теорема тривиальна. Действительно, если Q — некоторая мартингальная мера, то по теореме 3.10*

$$V_n = V_0 + \int_0^n \alpha dS$$

— мартингал относительно Q. Но тогда по свойству мартингалов

$$\mathbb{E}^Q(V_N) = \mathbb{E}^Q(V_0) = 0,$$

что противоречит условию арбитража.

Доказательство. Рассмотрим конечное вероятностное пространство $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. Будем рассматривать случайную величину на Ω как элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим множества случайных величин

$$L = \{V_T = (\alpha * S)_T, \ \ \alpha \text{ — самофинансируемая стратегия}, \ V_0 = 0\}$$

(итоговый выигрыш с нулевым стартовым капиталом и самофинансируемой стратегией)

$$K = \{\xi \geq 0, \ \xi(\omega) > 0, \ \text{для некоторого } \omega \in \Omega, \ \mathbb{E}\xi = 1\}.$$

Отсутствие арбитража равносильно тому, что K и L не пересекаются.

Пусть δ_i — случайная величина, равная 1 в ω_i и нулю в других точках, $x = (x_1, \cdots, x_n) = \sum x_i \delta_i$. Так как K и L — не пересекающиеся выпуклые множества, то по теореме об отделимости существует линейный функционал f, строго положительный на K и равный нулю на L

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i q_i.$$

Заметим, что $\delta_i \in K$. Отсюда следует, что $f(\sigma_i) = q_i > 0$ для всех i.

Отсюда следует, что $Q = \frac{1}{\sum_{i=1}^n q_i}(q_1, \cdots, q_n)$ — корректно определенная вероятностная мера. Докажем, что S — мартингал относительно Q. Действительно, пусть $a_k = 0$, если $0 \leq k < n$, $\alpha_n = \eta$, где η — произвольная $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримая случайная величина,

$\alpha_k = 0$, $k > n$. Тогда $V_T = \eta(S_n - S_{n-1})$. Так как $f(V_T) = 0$, то отсюда следует, что $\mathbb{E}^Q V_T = 0$. Следовательно,

$$\mathbb{E}^Q \eta S_n = \mathbb{E}^Q \eta S_{n-1},$$

что и значает мартингальность S_k. □

3.7. **Доказательство первой фундаментальной теоремы в общем случае.** Другое доказательство: Yu. Kabanov, C. Stricker, A teachers' note on no-arbitrage criteria. http://ykabanov.perso.math.cnrs.fr/pdf/pdf71.pdf

Для упрощения изложения мы будем предполагать, что случайные величины B_n, S_n ограничены, кроме того, $B_n \geq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.24. *(Первая фундаментальная теорема) В модели с дискретным временем $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ отсутствие арбитража равносильно существованию вероятностной меры Q, эквивалентной P, относительно которой деноминированный процесс $\tilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}$ является мартингалом.*

В изложении ниже мы следуем лекциям [3]. Без ограничения общности мы считаем, что $B_n = 1$. Общий случай сводится к этому путем перенормировки $\tilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}$.

Лемма 3.25. *Положим $X_n = \Delta S_n$,*

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \mathbb{E}(I_{\{X_n > 0\}} | \mathcal{F}_{n-1})(\omega) > 0, \quad \mathbb{E}(I_{\{X_n < 0\}} | \mathcal{F}_{n-1})(\omega) > 0\},$$
$$B = \{\omega \in \Omega;\ \mathbb{E}(I_{\{X_n = 0\}} | \mathcal{F}_{n-1})(\omega) = 1\}.$$

Если отсутствует возможность арбитража, то $P(A \cup B) = 1$.

Доказательство. Положим

$$C = \{\mathbb{E}(I_{\{X_n < 0\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0\}.$$

Рассмотрим портфель $V_k = \alpha_k S_k + \beta_k$:

$$\alpha_k = \beta_k = 0, \text{если } k \leq n-1,$$
$$\alpha_n = I_C,\ \beta_n = -I_C S_{n-1},$$
$$\alpha_k = 0,\ \beta_k = V_n,\ \text{если } k \geq n+1.$$

Получаем

$$V_k = 0,\ k \leq n-1,$$
$$V_n = I_C(S_n - S_{n-1})$$
$$V_k = V_n,\ k \geq n+1.$$

Портфель самофинансируем и $V_N = I_C X_n$. Далее

$$\mathbb{E}(I_C I_{\{X_n < 0\}}) = \mathbb{E}(I_C \mathbb{E}(I_{\{X_n < 0\}} | \mathcal{F}_{n-1})) = 0.$$

Поэтому почти всюду $V_N \geq 0$. В силу отсутствия арбитража $V_N = 0$ п.в. Следовательно $I_C I_{\{X_n > 0\}} = 0$. Взяв условное математическое ожидание, получим

$$I_C \mathbb{E}(I_{\{X_n > 0\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Отсюда и из соотношения

$$\mathbb{E}(I_{\{X_n > 0\}} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(I_{\{X_n < 0\}} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(I_{\{X_n = 0\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 1$$

следует, что $C \subset B$.

Аналогичным образом для $D = \{\mathbb{E}(I_{\{X_n \leq 0\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 1\}$ получаем

$$I_D \mathbb{E}(I_{\{X_n > 0\}} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

поэтому D содержится в B.

Заметим, что дополнение A содержится в $C \cup D$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство первой фундаментальной теоремы. Доказательство того, что существование мартингальной меры влечет отсутствие арбитража такое же, как в случае конечного вероятностного пространства.

Докажем обратное. Пусть A, B, C — множества из предыдущей леммы. Положим

$$\varphi_n(a) = \mathbb{E}(e^{aX_n}|\mathcal{F}_{n-1}).$$

Функция $a \to \varphi_n(a)$ строго выпукла для всех $\omega \in A$ и $\lim_{a\to\infty} \varphi_n(a) = +\infty$ почти всюду на A. Действительно,

$$\lim_{a\to+\infty} \varphi_n(a) \geq (+\infty)\mathbb{E}(I_{X_n>0}|\mathcal{F}_{n-1}).$$

Выражение справа равно $+\infty$ на A. Случай $-\infty$ рассматривается аналогично. Поэтому для фиксированного $\omega \in A$ функция $\varphi_n(a)$ достигает минимума в некоторой точке $a_n(\omega)$, т.е. $\varphi_n'(a_n) = 0$:

$$\mathbb{E}(X_n e^{a_n X_n}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0. \tag{6}$$

На A^c положим $a_n = 0$. Тогда соотношение $\mathbb{E}(X_n e^{a_n X_n}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ будет выполняться почти всюду на B (убедитесь в этом с помощью предыдущей леммы!). В итоге мы получим $\mathbb{E}(X_n e^{a_n X_n}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ почти всюду.

Положим $Z_0 = 1$,

$$Z_n = Z_{n-1}\frac{e^{a_n X_n}}{\mathbb{E}(e^{a_n X_n}|\mathcal{F}_{n-1})}$$

и

$$Q = Z_N \cdot P.$$

Заметим, что $\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1}$. В частности $\mathbb{E}Z_N = \mathbb{E}Z_0 = 1$ (мера вероятностная).

Докажем, что $\mathbb{E}^Q X_n = 0$, т.е. S_n — мартингал относительно Q. Действительно,

$$\mathbb{E}^Q(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \frac{\mathbb{E}(X_n Z_N|\mathcal{F}_{n-1})}{\mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_{n-1})}$$

Далее

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n Z_N|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n \mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}\big(X_n Z_{n-1}\frac{e^{a_n X_n}}{\mathbb{E}(e^{a_n X_n}|\mathcal{F}_{n-1})}|\mathcal{F}_{n-1}\big) \\
&= \frac{Z_{n-1}}{\mathbb{E}(e^{a_n X_n}|\mathcal{F}_{n-1})}\mathbb{E}(X_n e^{a_n X_n}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Упражнение 3.26. *Рассмотрим одношаговую модель с двумя активами S_1, S_2, $r = 0$:*

$$S_1(0) = 4, \ S_2(0) = 7$$

$$S_1(\omega_1) = 8, \ S_1(\omega_2) = 6, \ S_1(\omega_3) = 3$$

$$S_2(\omega_1) = 10, \ S_2(\omega_2) = 8, \ S_2(\omega_3) = 4$$

Найти (или доказать, что такие не существуют) 1) все воспроизводимые активы, 2) все риск-нейтральные меры, 3) все арбитражные стратегии.

Упражнение 3.27. *Рассмотрим двушаговую модель с двумя активами* S_1, S_2, $r = 0$. *Для вектора* $(S_1(1), S_2(1), S_1(2), S_2(2))$ *реализуется одна из следующих восьми возможностей*

$$(11, 9, 14, 8); (11, 9, 10, 13); (11, 9, 10, 8)$$

$$(11, 10, 12, 11); (11, 10, 10, 9)$$

$$(8, 11, 12, 5); (8, 11, 10, 14); (8, 11, 6, 11)$$

Построить пространство Ω, *последовательность* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *и явно описать соответствующую мартингальную меру.*

Упражнение 3.28. *Пусть* $Q = Z \cdot P$, $Z > 0$ *— две эквивалентные вероятностные меры,* $\mathcal{B}$ *— сигма-алгебра,* ξ *— случайная величина. Докажите формулу для условного математического ожидания*

$$\mathbb{E}_Q(\xi|\mathcal{B}) = \frac{\mathbb{E}_P(\xi Z|\mathcal{B})}{\mathbb{E}_P(Z|\mathcal{B})}.$$

Упражнение 3.29. *Пусть* Ω *состоит из двух состояний* $\{\omega_1, \omega_2\}$. $B_n = e^{rn}, S_0 = 1, S_1(\omega_1) = u, S_2(\omega_2) = d$, $u > d > 0$, $n \in \{0, 1\}$. *Для каких значений* r, u, d *существует возможность арбитража? Для ситуаций, когда такой возможности нет, опишите риск-нейтральную меру.*

Упражнение 3.30. *Пусть* ξ_i *— бернуллиевские независимые случайные величины,* $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$. *Найдите вероятностную меру* Q, *эквивалентную* P, *относительно которой процесс*

$$S_n = e^{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n},\ S_0 = 1$$

является мартингалом, $0 \le n \le N$.

Считая, что базовый актив равен S_n *и* $B_n = 1$, *найти формулу для процесса, воспроизводящего актив* Z, *заданный в момент* N.

Упражнение 3.31. *Пусть* ξ_i, $1 \le i \le N$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины. Считая, что базовый актив равен*

$$S_n = e^{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n},\ S_0 = 1$$

и $B_n = 1$ *доказать, что актив* $Z = e^{\xi_1} + \ldots + e^{\xi_N}$ *воспроизводим и найти его стоимость в момент* 0.

3.8. **Полнота рынка. Вторая фундаментальная теорема.** Считаем, что выполнены все предположения предыдущего раздела.

В настоящем разделе обсуждается вопрос единственности мартингальной меры и формуда для цены деривативa (например, опциона), получаемая с помощью арбитражной теории.

Определение 3.32. *Актив* Z *называется воспроизводимым, если существует такой самофинансируемый процесс* V_n, *что* $Z_N = V_N$.

Теорема 3.33. (Цена деривативa.) *Пусть* Z *— воспроизводимый актив на рынке без арбитража. Тогда существует единственный (с точностью до множества меры нуль) самофинансируемый процесс* V_n *со свойством* $V_N = Z$. *В частности, сам портфель и его начальная цена* V_0 *не зависит от выбора мартингальной меры.*

Доказательство. Без ограничения общности $B_n = 1$. Для любой мартингальной меры $\tilde{P}$, эквивалентной исходной, и любого самофинансируемого портфеля V_n последовательность V_n является мартингалом и обязана совпадать с $\tilde{\mathbb{E}}(V_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. В частности, это показывает единственность такого портфеля. □

Величину V_0 естественно считать начальной ценой деривоватива.

Определение 3.34. *Рынок называется полным, если любой такой актив Z, что Z/B_N ограничено, является воспроизводимым.*

Теорема 3.35. *Рынок является полным тогда и только тогда, когда существует единственная мартингальная мера, эквивалентная P.*

Доказательство. **(Полнота $\Longrightarrow$ единственность)** Без ограничения общности считаем, что $B_n = 1$. Пусть $A \subset \mathcal{F}_N$, P_1, P_2 — две различные мартингальные меры. Случайная величина I_A воспроизводима, поэтому существует самофинансируемый портфель $V_n = \alpha S_n + \beta_n$, $V_N = Z$. Заметим, что $V_n = V_0 + (\alpha \star S)_n$, является мартингалом, так как V_n ограничен и является мартингалом, причем V_0 постоянно, потому что $\mathcal{F}_0$ — тривиальная σ-алгебра. Отсюда получаем, что $V_0 = \mathbb{E}_1(Z|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_1(Z) = P_1(A)$. Точно также $V_0 = P_2(A)$. Отсюда следует, что $P_1(A) = P_2(A)$ на множествах из $\mathcal{F}_N$.

(Единственность $\Longrightarrow$ полнота)

Шаг 1 (Единственность $\Longrightarrow$ свойство Бернулли). Свойство Бернулли для S означает, что условное распределение S_n при известных $S_0, \cdots, S_{n-1}$ является мерой, сосредоточенной в двух точках. Оказывается, что из единственности мартингальной меры следует, что S обладает свойством Бернулли.

Доказательствог остается в качестве упражнения (см. [3], Proposition 6.5.3.). Докажите, что утверждение сводится к следующей лемме

Лемма 3.36. *Пусть мера μ на прямой обладает свойством $\int |x| d\mu < \infty, \int x d\mu = 0$. Докажите, что если μ отлична от меры, сосредоточенной на двух точках, то существует эквивалентная ей мера $\nu \neq \mu$ со свойствами $\int |x| d\nu < \infty, \int x d\nu = 0$.*

Будем говорить, что мартингал M имеет предсказуемое представление, если

$$M_n = M_0 + (\alpha \star S)_n,$$

где α — предсказуемая последовательность.

Шаг 2 (Свойство Бернулли $\Longrightarrow$ любой мартингал имеет предсказуемое представление).

Для мартингала M будем искать нужную последовательность в виде $\alpha_n = f_n(S_0, \cdots, S_{n-1})$. Пусть α_i, S_i определены до момента $n-1$, S_i может принимать не более двух значений. Обозначим возможные приращения M и S через $\delta^1_n := \Delta M^1_n$, $\delta^2_n := \Delta M^2_n$, $d^1_n = \Delta S^1_n$, $d^2_n = \Delta S^2_n$. Заметим, что если $d^1_n = d^2_n$, то $\delta^1_n = \delta^2_n$.

Из соотношений $\Delta M_n = \alpha_n \Delta S_n$ получаем два уравнения

$$\delta^1_n = \alpha_n \Delta S^1_n, \quad \delta^2_n = \alpha_n \Delta S^2_n$$

с неизвестной величиной α_n. Используя мартингальность S, M, получаем

$$0 = \mathbb{E}(\Delta S_n | S_0 = a_0, \cdots, S_{n-1} = a_{n-1}) = \mathbb{E}(\Delta M_n | S_0 = a_0, \cdots, S_{n-1} = a_{n-1}).$$

Положим

$$p_n = P(\Delta S_n = d^1_n | S_0 = a_0, \cdots, S_{n-1} = a_{n-1}),$$
$$q_n = 1 - p_n = P(\Delta S_n = d^2_n | S_0 = a_0, \cdots, S_{n-1} = a_{n-1}).$$

Имеем:

$$0 = p_n d^1_n + q_n d^2_n, \ 0 = p_n \delta^1_n + q_n \delta^2_n.$$

Убедитесь, что если $d_n^1 = d_n^2$, то $d_n^1 = d_n^2 = \delta_n^1 = \delta_n^2 = 0$ и можно положить $\alpha_n = 0$. В противном случае можно положить $\alpha_n = \frac{\delta_n^1}{d_n^1}$. Несложно видеть, что α_n зависит только от $S_0, \cdots, S_{i-1}$.

Шаг 3 (Любой мартингал имеет предсказуемое представление $\Longrightarrow$ полнота).

Пусть Z — ограниченная с.в. Представим мартингал $M_n(Z|\mathcal{F}_n)$ в виде $M_n = M_0 + (\alpha \star S)_n$. Заметим, что $\beta_n = M_n - \alpha_n S_n$ — предсказуемая с.в. Действительно,

$$\beta_n = M_0 + (\alpha \star S)_n - \alpha_n S_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \Delta S_i - \alpha_n S_{n-1}.$$

Следовательно,

$$M_n = \alpha_n S_n + \beta_n$$

— самофинансируемый портфель. □

3.9. **Модель CRR и сходимость к модели Блэка-Шоулза.** Напомним, что в модели CRR время дискретно, а базовый актив задается биномиальным распределением. Обозначения в этом разделе несколько отличаются от тех, которые были выше. Время обозначается параметром t

$$t \in \{0, 1, \dots, T\}.$$

Облигация моделируется формулой

$$B_t = (1+r)^t$$

Актив: для любого момента t

$$S_t = (1+a)S_{t-1}, \text{ или } S_t = (1+b)S_{t-1},$$

где

$$b > a > -1.$$

Вероятностное пространство удобно явно задать как произведение множеств из двух точек

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^T.$$

Поток σ-алгебр $\mathcal{F}_t$: каждая $\mathcal{F}_t$ порождена значениями актива $S_k, 0 \leq k \leq t$.

Упражнение 3.37. *Процесс $\hat{S}_t = \frac{S_t}{(1+r)^t}$ является мартингалом относительно меры P тогда и только тогда, когда случайные величины $R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$ являются независимыми и одинаково распределенными, при этом*

$$P(R_1 = 1+a) = q, \; P(R_1 = 1+b) = 1-q, \; q = \frac{r-a}{b-a}.$$

Согласно общему принципу оценивания опционов, цена опциона типа call

$$C_T = (S_T - K)_+$$

в момент t вычисляется по формуле

$$V_t(S_T) = \beta_t^{-1} \mathbb{E}(\beta_T C_T | \mathcal{F}_t), \quad \beta_t = \frac{1}{(1+r)^t}.$$

Запишем ее в виде

$$V_t(S_T) = \beta_t^{-1} \beta_T \mathbb{E}\Big((S_t \prod_{k=t+1}^{T} R_k - K)_+ | \mathcal{F}_t\Big) = v(t, S_t),$$

где

$$v(t,x) = (1+r)^{t-T}\mathbb{E}\big(x\prod_{k=t+1}^{T} R_k - K\big)_+$$
$$= (1+r)^{t-T}\sum_{u=0}^{T-t} C_{T-t}^{u} q^u (1-q)^{T-t-u}\big[x(1+b)^u(1+a)^{T-t-u} - K\big]_+$$

Рассмотрим теперь последовательность моделей CRR. Для натурального N на отрезке $[0,T]$ построим последовательность дискретных моментов

$$0, h_N, 2h_N, \dots, Nh_N,$$

где $h_N = T/N$.

Цена опциона call в момент 0

$$V_0 = (1+\rho_N)^{-N}\mathbb{E}_{P_N}\big((S_0\prod_{k=1}^{N} R_{N,k} - K)_+\big)$$

где ρ_N – процентная ставка, $R_{N,k}, k \le N$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины относительно риск-нейтральной меры P_N

$$P_N(R_{N,1} = 1 + b_N) = q_N = \frac{\rho_N - a_N}{b_N - a_N}.$$

Положим

$$\rho_N = rh_N.$$

Тогда $\lim_{N\to\infty}(1+\rho_N)^N = e^{rT}$.

Параметры a_N и b_N подберем таким образом, что

$$\log\Big(\frac{1+a_N}{1+\rho_N}\Big) = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}},\ \log\Big(\frac{1+b_N}{1+\rho_N}\Big) = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}$$

Заметим, что случайные величины

$$Y_{N,k} = \log\Big(\frac{R_{N,k}}{1+\rho_N}\Big)$$

независимо распределены. Рассмотрим их сумму

$$Z_N = \sum_{k=1}^{N} Y_{N,k}.$$

Цена опциона call равна

$$V_0 = \mathbb{E}_{P_N}\Big[\Big(S_0 e^{Z_N} - \frac{K}{(1+\rho_N)^N}\Big)_+\Big].$$

Для вычисления предела при $N \to \infty$ мы воспользуемся центральной предельной теоремой. Для этого нам надо вычислить характеристики случайной величины $Y_{N,1}$. Случайная величина $Y_{N,1}$ принимает значения $\pm\sigma\sqrt{h_N}$. При этом

$$\mathbb{E}_{P_N} Y_{N,1} = (2q_N - 1)\sqrt{\frac{T}{N}}$$

$$\mathbb{E}_{P_N} Y_{N,1}^2 = (2q_N - 1)\sqrt{\frac{T}{N}} = \sigma^2 h_N.$$

Выбор параметров влечет $q_N \to 1/2$. Действительно, это следует из соотношения

$$2q_N - 1 = 1 - \frac{e^{\sigma\sqrt{h_N}} - 1}{\sinh(\sigma\sqrt{h_N})}.$$

Упражнение 3.38. *Докажите, что*

$$2q_N - 1 = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h_N} + o(1/N),$$

$$\mathbb{E}Z_N = N\mathbb{E}_{P_N}Y_{N,1} \to -\frac{1}{2}\sigma^2 T,$$

$$\sigma^2(Z_N) = N\Big(\sigma^2\frac{T}{N} + o\Big(\frac{1}{N}\Big)\Big) \to \sigma^2 T.$$

Теорема 3.39. *(Центральная предельная теорема в форме Линдеберга) Пусть* $Y_{N,k}$, $1 \le k \le N$ *последовательности независимых случайных величин, одинаково распределенных со средним* μ_N *и дисперсией* σ_N^2. *Предположим, что*

$$N\mu_N \to \mu,\ \sigma_N^2 = \Sigma^2 + o\Big(\frac{1}{N}\Big)$$

при $N \to \infty$. *Тогда суммы* $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_{N,k}$ *сходятся по распределению к* $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

В частности, мы получаем, что Z_N сходится по распределению к гауссовскому закону $\mathcal{N}(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$.

Упражнение 3.40. *Покажите, что предельное выражение для цены опциона типа call вычислется по формуле Блэка-Шоулза*

$$V_0 = S_0\Phi(d_+) - e^{-rT}K\Phi(d_-),$$

где

$$d_\pm = \frac{\log\big(\frac{S_0}{K}\big) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

3.10. **Мартингалы и моменты остановки.** Всюду далее считается, что задана одна из двух ситуаций:

1) (дискретный случай) задан мартингал $(M_n, \mathcal{F}_n)$. Марковским моментом называется случайная величина τ со значениями в $0 \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ и свойством $\{\tau \le n\} \subset \mathcal{F}_n$.

2) (непрерывный случай) задан винеровский процесс W_t и поток σ-алгебр, им порожденный $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, 0 \le s \le t\}$. Мартингалом M_t называется процесс со свойствами: M_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$, $\mathbb{E}|M_t| < \infty$, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$. Марковским моментом называется случайная величина τ со значениями в $[0, \infty]$ и свойством $\{\tau \le t\} \subset \mathcal{F}_t$.

Упражнение 3.41. (1) *Докажите в дискретном случае, что если* τ *и* σ — *марковские моменты, то* $\min(\tau, \sigma), \max(\tau, \sigma), \tau + \sigma$ — *марковские моменты.*
(2) *Докажите в непрерывном случае, что если* τ *и* σ — *марковские моменты, то* $\min(\tau, \sigma), \max(\tau, \sigma), \tau + \sigma$ — *марковские моменты.*

Упражнение 3.42. *Пусть* τ — *дискретный марковский момент с ограниченным числом значений,* M_n — *мартингал. Тогда* $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.

Упражнение 3.43. *Пусть в непрерывном случае заданы ограниченные моменты* τ, σ *с конечным числом значений.Докажите, что* $\mathbb{E}W_\tau = 0$, $\mathbb{E}\big(W_\tau W_\sigma\big) = \mathbb{E}(\tau \wedge \sigma)$.

Соотношение
$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 \qquad (7)$$
имеет место для более широкого класса мартингалов и марковских моментов. Тем не менее, для равенства (7) требуются дополнительные предположения как о M_t, так и о τ.

Например, для момента $\tau_a = \inf\{t \geq 0, W_t \geq a\}$ достижения винеровским процессом уровня a равенство (7) не выполнено, потому что $W_{\tau_a} = a$. Тем не менее, для мартингалов W_t и $W_t^2 - t$ имеет место следующий результат.

Теорема 3.44. *Если τ — марковский момент и $\mathbb{E}\tau < \infty$, то $\mathbb{E}W_\tau = 0$, $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.*

Теорема 3.45. (Принцип отражения). *Пусть $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\}$ — первый момент достижения $a \in \mathbb{R}$. Процесс*
$$B_t = \{W_t, \text{если } t \leq \tau_a; \quad 2a - W_t, \text{если } t > \tau_a\}$$
является винеровским.

Упражнение 3.46. *Положим $S_t = \sup_{s\in[0,t]} W_s$. Используя принцип отражения, докажите, что*
$$P(S_t \leq a) = P(|W_t| \leq a).$$

Упражнение 3.47. *Найдите распределение момента первого достижения точки a:*
$$\tau_a = \inf\{t \geq 0, W_t \geq a\}.$$
Докажите, что $\mathbb{E}\tau_a = +\infty$ и $\mathbb{E}W_{\tau_a} \neq 0$.

Следующие задачи решаются с помощью свойства (7).

Упражнение 3.48. *Докажите, что τ имеет устойчивое распределение. Указание: докажите, что $e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$ — мартингал.*

Упражнение 3.49. *(Непрерывная задача о разорении). Пусть τ — первый момент выхода W_t из интервала (a,b), $a<0, b>0$. Найдите*
$$P(W_\tau = a), \quad P(W_\tau = b), \quad \mathbb{E}\tau.$$

4. Модели с непрерывным временем

4.1. **Мартингалы. Марковские моменты, неравенства.** Всюду далее считаем, что задано вероятностное пространство $(\Omega, P, \mathcal{F})$ и поток σ -алгебр $\mathcal{F}$, т.е. семейство σ-алгебр со свойством $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $s \leq t$.

Определение 4.1. *Процесс ξ_t называется согласованным, если с.в. ξ_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$ при всех t.*

Определение 4.2. *Пусть $\mathcal{F}_t$ — поток σ-алгебр. Согласованный случайный процесс $\{\xi_t\}$ с $\mathbb{E}|\xi_t| < \infty$ называется мартингалом относительно $\mathcal{F}_t$, если $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) = \xi_s$, $s \leq t$.*

Аналогично определяется мартингал с дискретным временем $\{\xi_n\}$: $\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_m) = \xi_m$, $m \leq n$.

Пример 4.3. *Согласованный процесс ξ_t с постоянным средним $\mathbb{E}\xi_t = C$, приращения $\xi_t - \xi_s$ которого не зависят от $\mathcal{F}_s$, $t > s$, является мартингалом относительно потока σ-алгебр, порожденных ξ_t.*

Доказательство. $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\xi_s|\mathcal{F}_s) = \xi_s + \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s) = \xi_s$. □

Пример 4.4. *Пусть $(W_t, \mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс. Тогда $W_t^2 - t$ — мартингал относительно $\mathcal{F}_t$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}\big((W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) + W_s^2|\mathcal{F}_s\Big) - t \\ &= \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 + 2W_s\mathbb{E}\big((W_t - W_s)|\mathcal{F}_s\big) + W_s^2 - t \\ &= t - s + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s^2 - t = W_s^2 - s.\end{aligned}$$

□

Пример 4.5. *Пусть X — случайная величина с конечным первым моментом. Тогда $X_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ — мартингал относительно $\mathcal{F}_t$.*

Определение 4.6. *Пусть $\mathcal{F}_t$ — поток σ-алгебр. Случайный согласованный процесс $\{\xi_t\}$ называется субмартингалом (супермартингалом) относительно $\mathcal{F}_t$, если $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) \geq \xi_s$ ($\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) \leq \xi_s$), $s \leq t$.*

Упражнение 4.7. *Докажите следующую эквивалентную формулировку: случайный согласованный процесс $\{\xi_t\}$ называется мартингалом (субмартингалом) относительно $\mathcal{F}_t$, если*

$$\mathbb{E}(\xi_t \cdot \eta) = \mathbb{E}(\xi_s \cdot \eta) \quad \Big(\mathbb{E}(\xi_t \cdot \eta) \geq \mathbb{E}(\xi_s \cdot \eta)\Big)$$

для любой неотрицательной ограниченной функции η, измеримой относительно $\mathcal{F}_s$.

Теорема 4.8. *Пусть f — выпуклая функция, ξ_t — мартингал. Тогда $f(\xi_t)$ — субмартингал, если $\mathbb{E}|f(\xi_t)| < \infty$.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в применении известного неравенства для выпуклых функций

$$f(x) \geq f(y) + C(x - y),$$

выполненного для некоторой константы C, зависящей только от x. Если f — гладкая функция по x, то $C(x) = f'(x)$. В противном случае множество таких C содержит более одного элемента и образует так называемый субдифференциал функции f. В качестве C можно взять, например, правую производную f. Имеем:

$$f(\xi_t) \geq f(\xi_s) + C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s).$$

Умножим неравенство на неотрицательную функцию η, измеримую относительно $\mathcal{F}_s$, и возьмем математическое ожидание от обеих частей:

$$\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\eta\big) \geq \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\eta\big) + \mathbb{E}\big(C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s)\eta\big) = \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\eta\big) + \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\xi_t\eta\big) - \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\xi_s\eta\big).$$

Далее заметим, что $\mathbb{E}\big(C(\xi_s)\eta\xi_t\big) = \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\eta\mathbb{E}(\xi_t|F_s)\big) = \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\eta\xi_s\big)$ в силу того, что ξ_t — мартингал. Отсюда получаем искомое неравенство $\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\eta\big) \geq \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\eta\big)$.

В этом доказательстве есть пробел — мы неявно использовали интегрируемость функции $C(\xi_s)\xi_t\eta$. Для того, чтобы его устранить, можно дополнительно потребовать, чтобы $\eta C(\xi_s)$ было ограничено (например, взять $\eta = \varphi I_{A_N}$, где $A_N = \{|C(\xi_s)| \leq N\}$). Тогда вычисления выше верны и мы получаем $\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\varphi I_{A_N}\big) \geq \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\varphi I_{A_N}\big)$. Переходя к пределу $N \to \infty$ и применяя теорему Лебега, получаем искомое соотношение $\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\varphi\big) \geq \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\varphi\big)$. □

Определение 4.9. *Случайная величина $\tau \in [0, +\infty]$ называется марковским моментом (stopping time), если для любого t событие $\{\tau \leq t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$.*

Неформально можно сказать, что τ — случайная величина, "не зависящая от будущего".

Упражнение 4.10. *Пусть $U \subset \mathbb{R}$ — открытое множество, W_t — винеровский процесс. Докажите, что $\tau = \inf\{t > 0 : W_t \notin U\}$ — марковский момент. Указание: представьте U в виде возрастающих замкнутых множеств K_n. Тогда $\{\omega : \tau(\omega) \le t\} = \cap_m \cup_{r\in\mathbb{Q}, r<t} \{\omega : W_r \notin K_m\}$.*

Лемма 4.11. *Пусть τ — марковский момент с конечным числом значений $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, ξ_t — субмартингал. Выполнено неравенство*

$$\mathbb{E}\xi_{t_1} \le \mathbb{E}\xi_\tau \le \mathbb{E}\xi_{t_n}.$$

Доказательство. Имеем: $\mathbb{E}\xi_\tau = \sum_{t_k} \mathbb{E}(\xi_{t_k} I_{\{\tau=t_k\}}) = \mathbb{E}(\xi_{t_1}) - \mathbb{E}(\xi_{t_1} I_{\tau>t_1}) + \mathbb{E}(\xi_{t_2} I_{\tau>t_1}) - \mathbb{E}(\xi_{t_2} I_{\tau>t_2}) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_{t_n} I_{\tau>t_{n-1}})$. Осталось заметить, что по определению субмартингала $\mathbb{E}(\xi_{t_{k+1}} I_{\tau>t_k}) \ge \mathbb{E}(\xi_{t_k} I_{\tau>t_k})$, следовательно $\mathbb{E}\xi_\tau \ge \mathbb{E}(\xi_{t_1})$. Второе неравенство доказывается аналогично □

Следствие 4.12. *1) Если τ — марковский момент с конечным числом значений $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, ξ_t — мартингал, то выполнено точное равенство*

$$\mathbb{E}\xi_{t_1} = \mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_{t_n}.$$

2) Если ξ_t — неотрицательный субмартингал, то

$$P(\max_{1\le k\le n} \xi_{t_k} \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}\xi_{t_n}}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, для доказательства второго заметим, что если $\tau = \min\{t_k : \xi_{t_k} \ge \varepsilon\}$ ($\tau = t_n$, если таких t_k нет), то согласно лемме 4.11 и неравенству Чебышева

$$P(\max_{1\le k\le n} \xi_{t_k} \ge \varepsilon) = P(\xi_\tau \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}(\xi_\tau)}{\varepsilon} \le \frac{\mathbb{E}\xi_{t_n}}{\varepsilon}$$

□

Естественно предположить, что доказанные выше соотношения можно распространить на более общие типы марковских моментов. Это действительно можно сделать в предположении односторонней непрерывности траекторий процессов и ограничений на интегрируемость моментов. Следующая теорема является частным случаем так называемой optional stopping theorem или OS-теоремы. В доказательстве нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Задача 4.13. *Пусть η — с.в., $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$. Существует такая четная выпуклая функция $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, что $\mathbb{E}f(\eta) < \infty$, f возрастает на $[0, +\infty)$ и $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$. Указание: воспользуйтесь тем, что $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ равносильно условию $\sum_{n=0}^{\infty} nP(n \le |\eta| < n+1) < \infty$.*

Теорема 4.14. *Пусть ξ_t — мартингал с непрерывными справа траекториями, τ — марковский момент. Тогда соотношение*

$$\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_0$$

имеет место, если $\tau \le K$ п.н. для некоторого числа $K > 0$.

Доказательство. Приблизим τ последовательностью марковских моментов с конечным числом значений $\tau_n = \max\Big[2^{-n}\big(1+[2^n\tau]\big), K\Big]$. Имеем $\mathbb{E}\xi_0 = \mathbb{E}\xi_{\tau_n}$. В силу непрерывности справа траекторий $\xi_{\tau_n} \to \xi_\tau$. Теорема будет доказана, если мы сможем перейти к пределу под знаком интеграла. Для этого нам достаточно доказать, что семейство с.в. $\{\xi_{\tau_n}\}$ *равномерно интегрируемо*, т.е.

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n \mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big) = 0.$$

Заметим сначала, что $|\xi_t|$ — субмартингал, поэтому в силу следствия 4.12

$$\sup_n P(|\xi_{\tau_n}| > N) \le P(\sup_n |\xi_{\tau_n}| > N) \le \frac{\mathbb{E}(|\xi_K|)}{N}.$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n P(|\xi_{\tau_n}| > N) = 0. \qquad (8)$$

Согласно задаче 4.13, $\mathbb{E}f(\xi_K) < \infty$ для некоторой неотрицательной четной выпуклой функции f с $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t} = +\infty$. Процесс $f(\xi_t) = f(|\xi_t|)$ — субмартингал, поэтому в силу леммы 4.11

$$\mathbb{E}f(\xi_{\tau_n}) \le \mathbb{E}f(\xi_K).$$

Далее, в силу неравенства Иенсена (примененного к вероятностной мере $\frac{1}{P(|\xi_{\tau_n}|>N)}I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\cdot P$)

$$f\Big(\frac{\mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)}\Big) \le \frac{\mathbb{E}\Big(f(|\xi_{\tau_n}|)I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\Big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)} \le \frac{\mathbb{E}\Big(f(|\xi_{\tau_n}|)\Big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)} \le \frac{\mathbb{E}\big(f(|\xi_K|)\big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)}.$$

В силу того, что f возрастает на $[0,+\infty)$, получаем

$$\mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big) \le P(|\xi_{\tau_n}| > N)f^{-1}\Big(\frac{\mathbb{E}\big(f(|\xi_K|)\big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)}\Big).$$

Заметим, что из условия $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t} = +\infty$ следует, что $\lim_{x\to 0+} xf^{-1}(C/x) = C\lim_{y\to+\infty}\frac{f^{-1}(Cy)}{Cy} = C\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{f(t)} = 0$. Поэтому, в силу (8).

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n \mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big) = 0$$

Равномерная интегрируемость доказана.

Наконец, докажем, что из равномерной интегрируемости следует искомый предельный переход. Имеем:

$$\mathbb{E}\xi_{\tau_n} = \mathbb{E}(\xi_{\tau_n}I_{\{|\xi_{\tau_n}|\le N\}}) + \mathbb{E}(\xi_{\tau_n}I_{\{|\xi_{\tau_n}|>N\}}).$$

Пусть N таково, что $P(|\xi_\tau| = N) = 0$. Тогда $\lim_n \mathbb{E}(\xi_{\tau_n}I_{|\xi_{\tau_n}|\le N}) \to \mathbb{E}(\xi_\tau I_{|\xi_\tau|\le N})$ по теореме о мажорированной сходимости. В силу равномерной интегрируемости $\lim_N \sup_n \mathbb{E}(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N}) = 0$. Отсюда легко следует искомое соотношение $\lim_n \mathbb{E}\xi_{\tau_n} = \mathbb{E}\xi_\tau$. □

Следующее обобщение следствия 4.12 (2) несложно и мы его опустим (см. микротеорему 7.3.5, **А.Д. Вентцель**, "Случайные процессы").

Теорема 4.15. (**Неравенство Колмогорова**). *Пусть ξ_t — неотрицательный субмартингал с непрерывными справа траекториями. Тогда* $\forall\varepsilon > 0$

$$P(\sup_{t\in[0,T]}\xi_t \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}\xi_T}{\varepsilon}.$$

4.2. **Стохастический интеграл.** Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T_0]$, удовлетворяющее свойству

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \ s \le t.$$

Такое семейство будем называть потоком (”filtration” в англоязычной литературе).

Будем говорить, что $(W_t, \mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс относительно $\mathcal{F}_t$, если W_t — винеровский процесс, W_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$ и $W_{t+s} - W_t$ не зависит от $\mathcal{F}_t$ для любых $s, t \ge 0$.

Для заданного винеровского процесса всегда существует такое семейство $\mathcal{F}_t$, для которого это свойство выполняется. В качестве такового можно взять σ-алгебру $\mathcal{F}_{\le t}$, которая строится следующим образом.

Упражнение 4.16. *Пусть $\mathcal{F}_{\le t} = \sigma\{W_s, s \in [0,t]\} = \sigma\{\omega : W_s(\omega) \in B, s \in [0,t], B \in \mathcal{B}\}$ (через $\mathcal{B}$ обозначается совокупность борелевских множеств прямой) порождена случайными величинами W_s, $s \in [0,t]$. Тогда $(W_t, \mathcal{F}_{\le t})$ — винеровский процесс относительно $\mathcal{F}_{\le t}$.*

В момент времени t σ-алгебру $\mathcal{F}_t$ естественно понимать как совокупность событий ”прошлого” и ”настоящего”.

Мы обсудим построение **стохастического интеграла** или **интеграла Ито**

$$\int_0^T f(t,\omega) \, dW_t$$

от случайных функций. Потребность в этом объекте возникает в различных задачах физики и техники.

Замечание 4.17. *Всюду далее будем предполагать, что все функции вида $f(t,\omega)$, $t \in [0,T], \omega \in \Omega$ измеримы относительно пополнения σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$ по мере $\lambda \times P$, где λ — мера Лебега на отрезке $[0,T]$. В частности, для таких функций определены двойные интегралы $\int_{[0,T]\times\Omega} f(s,\omega) \, ds \, dP$ по произведению мер $\lambda \times P$. По теореме Фубини такие интегралы сводятся к повторным интегралам вида $\mathbb{E} \int_0^T f(t,\omega) \, dt$.*

Впервые интегралы такого вида появились в работе Винера, Пэли и Зигмунда (1933). Там они были определены для неслучайных дифференцируемых функций путем интегрирования по частям

$$\int_0^T f(s) \, dW_s = f(T) W_T - \int_0^T f'(s) W_s \, ds.$$

В более сложной ситуации попытки определить стохастический интеграл для каждой фиксированной траектории наталкиваются на трудность, связанную с тем, что почти все траектории $W_t(\omega)$ имеют бесконечные вариации на отрезке. Поэтому конструкция стохастического интеграла (К. Ито, 1942) осуществляется совершенно другим путем.

Шаг 1. Стохастический интеграл для простых функций.

Простой функцией будем считать функции вида

$$f(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n} f_k(\omega) I_{(t_k, t_{k+1}]}, \tag{9}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = T$ — разбиение отрезка $[0,T]$, а каждая с.в. f_k измерима относительно $\mathcal{F}_{t_k}$ и обладает конечным вторым моментом $\mathbb{E} f_k^2 < \infty$.

Замечание 4.18. *Дополнительное условие измеримости f_k относительно $\mathcal{F}_{t_k}$ существенно отличает понятие простой функции в смысле, указанном выше, от стандартного понятия ступенчатой функции, известного из анализа.*

Пример 4.19. *Функция $\sum_{i=0}^{n} W_{t_k} I_{(t_k,t_{k+1}]}$ — простая, а $\sum_{i=0}^{n} W_{t_{k+1}} I_{(t_k,t_{k+1}]}$ — нет.*

Для простых функций положим:

$$\int_0^t f(s,\omega)\ ds = \sum_{i=0}^{n} f_k(\omega)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Лемма 4.20. *(Изометрия стохастического интеграла). Для любой простой функции f*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t\Big)^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^T f^2(t,\omega)dt\Big].$$

Доказательство. Без ограничения общности можно стчитать, что функции f, g строятся с помощью одного и того же разбиения.

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t\Big)^2 = \sum_{i,j} \mathbb{E}\Big(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\Big).$$

Несложно видеть, что для $i < j$

$$\mathbb{E}\Big(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \mathbb{E}\Big[\Big(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_t})\Big]\mathbb{E}\Big(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\Big) = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t\Big)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(f_i^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(f_i^2)\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 (t_{i+1} - t_i)\Big) = \mathbb{E}\Big[\int_0^T f^2(t,\omega)dt\Big].\end{aligned}$$

□

В частности, для пары простых функций f, g

$$\mathbb{E}\big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t \cdot \int_0^T g(t,\omega)\ dW_t\big) = \mathbb{E}\int_0^T fg\ dt,$$

$$\mathbb{E}\big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t - \int_0^T g(t,\omega)\ dW_t\big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (f-g)^2\ dt.$$

Из последнего равенства следует, что определение интеграла от простой функции не зависит от способа ее представления в виде (9).

Замечание 4.21. *Нетрудно убедиться, что стохастический интеграл линеен: $\int_0^T (c_1 f + c_2 g)\ dW_t = c_1 \int_0^T f\ dW_t + c_2 \int_0^T g\ dW_t$.*

Как мы видим, стохастический интеграл является линейным изометрическим оператором из пространства простых функций, наделенных скалярным произведением $(f,g) \to \mathbb{E}(\int_0^T fg\ dt)$, в гильбертово пространство $L^2(P)$ случайных величин с конечным вторым моментом и скалярным произведением $(f,g) \to \mathbb{E}(fg)$. Поэтому стохастический интеграл естественно продолжить на пополнение простых функций по норме $f \to \Bigl(\mathbb{E}(\int_0^T f^2\,dt)\Bigr)^{1/2}$, т.е.

$$\int_0^T f\,dW_t = \lim_{n\to\infty}\int_0^T f_n\,dW_t,$$

где $\{f_n\}$ — такая последовательность простых функций, т.ч. $\lim_n \mathbb{E}\int_0^T \bigl(f_n - f\bigr)^2 dt = 0$. Свойство изометричности стохастического интеграла обеспечивает корректность этого определения.

Таким образом, мы определили стохастический интеграл на пополнении $N(0,T)$ простых функций по норме $f \to \Bigl(\mathbb{E}(\int_0^T f^2\,dt)\Bigr)^{1/2}$. Очевидно, функции из $N(0,T)$

1) измеримы в смысле замечания 4.17.

2) обладают свойством

$$\mathbb{E}\Bigl(\int_0^T f^2\,dt\Bigr) < \infty.$$

Функции из $N(0,T)$ обладают дополнительным важным свойством:

3) Функции из $N(0,T)$ измеримы относительно пополнения σ-алгебры, порожденной множествами вида $([0,T]\cap B)\times F$, где B — борелевское подмножество множества (t,∞), $F \subset \mathcal{F}_t$.

Последнее свойство следует из того, что им обладают простые функций.

Существует простой достаточный признак принадлежности $N(0,T)$.

Теорема 4.22. *Пусть функция $f(t,\omega)$ удовлетворяет свойствам 1)-2) и измерима относительно $\mathcal{F}_t$ при любом $t \in [0,T]$ (т.е., f* **согласована** *с $\mathcal{F}_t$). Тогда $f \in N(0,T)$.*

Доказательство. Достаточно построить последовательность простых функций $f_n \to f$ в $L^2(P)$. Предположим сначала, что f ограничена и имеет непрерывные траектории $t \mapsto f(t,\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. Положим:

$$f_n(t,\omega) = \sum_j f(t_j,\omega)(t_j,t_{j+1}].$$

Очевидно, функция f_n простая. В силу непрерывности путей $t \to f(t,\omega)$ имеем:

$$\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \bigl(f(t_j,\omega) - f(t,\omega)\bigr)^2 dt \to 0.$$

В силу ограниченности функции f имеем: $\mathbb{E}\Bigl(\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \bigl(f(t_j,\omega) - f(t,\omega)\bigr)^2 dt\Bigr) \to 0$ по теореме Лебега.

Предположим теперь, что f ограничена. В силу предыдущего шага достаточно приблизить f случайными функциями с непрерывными траекториями. Для этого рассмотрим такую гладкую неотрицательную функцию φ, что $\varphi = 0$ на $(-\infty,-1] \cup [0,+\infty)$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi_n = n\varphi(nx)$ и

$$f_n(t,\omega) = \int_0^T \varphi_n(s-t) f(s,\omega)\,ds = \int_0^t \varphi_n(s-t) f(s,\omega)\,ds.$$

Случайная функция f_n обладает непрерывными траекториями, ограничена и измерима относительно $\mathcal{F}_t$ при фиксированном t (для доказательства этого воспользуйтесь стандартным определением интеграла Лебега, как предела интегралов от простых функций). Поэтому f_n интегрируема согласно предыдущему шагу. Далее, как хорошо известно из анализа (см, например, В.И. Богачев, **Введение в теорию меры**, 1-й т., теорема 4.2.4), $\int_0^T (f_n(s) - f(s))^p ds \to 0$ для всех $p \geq 1$ (в частности, для $p = 2$). Опять в силу теоремы Лебега (используем ограниченность f и оценку $|\int_0^T g dx| \leq \sup_{[0,T]} g \cdot T$), имеем: $\mathbb{E} \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds \to 0$. Таким образом, теорема доказана для ограниченных функций.

На последнем этапе приблизим произвольную функцию $f \in N([0,T])$ ограниченными функциями $f_n = I_{\{|f|<n\}} \cdot f + n \cdot I_{\{f \geq n\}} - n \cdot I_{\{f \leq -n\}}$. Сходимость $f_n \to f$ в $L^2(P)$ следует из теоремы Лебега, так как $|f_n| \leq f$. □

Пример 4.23.

$$\int_0^t W_s \, dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Доказательство. Для любого разбиения $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ имеем:

$$\begin{aligned} W_{t_n}^2 &= (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^2 + 2W_{t_{n-1}}(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) + W_{t_{n-1}}^2. \\ &= (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^2 + 2W_{t_{n-1}}(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) + (W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}})^2 \\ &+ 2W_{t_{n-2}}(W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}) + W_{t_{n-2}}^2 \\ &= \cdots \\ &= \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 + 2 \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}). \end{aligned}$$

При измельчении разбиения первая сумма, как мы видели, стремится в среднеквадратичном к t, в то время как вторая сумма сходится (по определению) к стохастическому интегралу $2 \int_0^t W_s \, dW_s$. Последний существует в силу предыдущей теоремы. В пределе получаем нужное равенство. □

4.3. **Стохастический интеграл как мартингал.** Будем предполагать, что процесс $f(t, \omega)$ согласован и $\mathbb{E}(\int_0^T f^2(s, \omega) \, ds) < \infty$.

Теорема 4.24. *Существует такая версия стохастического интеграла с переменным верхним пределом $\eta_t = \int_0^t f(s, \omega) \, dW_s$, что*

1) *η_t — мартингал*
2) *для п.в. ω траектории η_t непрерывны.*

Доказательство.

Упражнение 4.25. *Докажите, что теорема верна для простой функции.*

Приблизим теперь функцию f простыми $f = \lim_n f_n$ по $L^2([0,T] \times P)$-норме. Положим

$$I_t^{(n)} = \int_0^t f_n \, dW_t.$$

В силу упражнения $I_t^{(n)}$ — мартингал с непрерывными траекториями. По неравенству Колмогорова и свойству изометрии

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t^{(n)} - I_t^{(m)}| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(|I_T^{(n)} - I_T^{(m)}|^2) = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \int_0^T (f_n - f_m)^2 \, dt \to 0$$

при $n, m \to \infty$. Выберем теперь подпоследовательность (которую для простоты обозначим снова через $I_t^{(n)}$), удовлетворяющую неравенствам

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t^{(n)} - I_t^{(n+1)}| > 2^{-n}) < 2^{-n}.$$

По лемме Бореля-Кантелли

$$P(\sup_{0\le t\le T}|I_t^{(n)}-I_t^{(n+1)}|>2^{-n} \text{ для бесконечного числа } n)=0.$$

Отсюда следует, что для п.в. ω существует $N(\omega)$, что

$$\sup_{0\le t\le T}|I_t^{(n)}-I_t^{(n+1)}|<2^{-n}$$

для всех $n>N(\omega)$. Следовательно, $I_t^{(n)}$ сходится равномерно на $[0,T]$ к случайной функции I_t для почти всех ω. Очевидно, I_t имеет непрерывные траектории. Кроме того, так как $I_t^{(n)}\to\int_0^t f_n\, dW_t$ в $L^2(P)$ для всех t, то I_t является версией $\int_0^t f_n\, dW_t$. То, что I_t является мартингалом, следует из того, что $I_t^{(n)}$ — мартингал и $L^2(P)$ сходимости $I_t^{(n)}\to I_t$ для всех $t\in[0,T]$. □

4.4. **Формула Ито.** Будем говорить, что согласованный процесс ξ_t имеет стохастический дифференциал

$$d\xi_t=\sigma_t dW_t+bdt,$$

если существует представление

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t\sigma_s dW_s+\int_0^t bds.$$

Теорема 4.26. *(***Формула Ито 1.***)*

$$d\big(\xi_t\eta_t\big)=\eta_t d\xi_t+\xi_t d\eta_t+d\eta_t\cdot d\xi_t,$$

где

$$dtdt=dtdW_t=0,\quad dW_t\cdot dW_t=dt.$$

Из этого результата следует **стандартная версия формулы Ито**.

Теорема 4.27. *(***Формула Ито 2.***)*

$$df(t,\xi_t)=f_t(t,\xi_t)dt+f_x(t,\xi_t)d\xi_t+\frac{1}{2}f_{xx}(t,\xi_t)(d\xi_t)^2.$$

Пример 4.28. *Докажите, что процесс*

$$\xi_t=e^{W_t-\frac{1}{2}t}$$

является мартингалом.

Доказательство. Найдем $d\xi_t$. По формуле Ито $d\xi_t=e^{W_t-\frac{1}{2}t}dW_t$. Поэтому $\xi_t=1+\int_0^t e^{W_s-\frac{1}{2}s}dW_s=1+\int_0^t\xi_s dW_s$. Процесс является мартингалом, потому что является стохастическим интегралом. □

4.5. **Стохастические дифференциальные уравнения.** Винеровский процесс не был вполне удовлетворительной моделью движения взвешеных частиц в жидкости с физической точки зрения. В 30-х годах была предложена другая модель, учитывавшая ньютоновское взаимодействие частиц. Поведение частицы описывалось уравнением Ланжевена

$$dv(t)=-\beta v(t)dt+dW_t,$$

где $\beta>0$ — некоторый коэффициент, v — скорость частицы. Формально это уравнение можно переписать таким образом:

$$ma=m\frac{dv(t)}{dt}=-m\beta v(t)+m\frac{dW_t}{dt}.$$

В математике и физике решение этого уравнения получило название процесса Орнштейна-Уленбека.

Процессом Орнштейна-Уленбека назывется решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = -\xi_t dt + \sqrt{2} dW_t, \quad \xi_0 = x.$$

Для решения этого уравнения найдем дифференциал процесса $e^t \xi_t$:

$$d(e^t \xi_t) = e^t \xi_t dt + e^t(-\xi_t dt + \sqrt{2} dW_t) = \sqrt{2} e^t dW_t.$$

Следовательно,

$$e^t \xi_t = x + \sqrt{2} \int_0^t e^s dW_s$$

и

$$\xi_t = x e^{-t} + \sqrt{2} e^{-t} \int_0^t e^s dW_s.$$

Из этого соотношения видно, что ξ_t — гауссовский процесс. Следовательно, его конечномерные распределения полностью определяются средним $\mathbb{E}\xi_t$ и функцией ковариации

$$K(s,t) = \mathbb{E}(\xi_t - \mathbb{E}\xi_t)(\xi_s - \mathbb{E}\xi_s).$$

Имеем:

$$\mathbb{E}\xi_t = x e^{-t},$$

$$\mathbb{E}(\xi_t - \mathbb{E}\xi_t)(\xi_s - \mathbb{E}\xi_s) = 2e^{-t-s} \mathbb{E}\Big(\int_0^t e^u dW_u \int_0^s e^u dW_u\Big) = 2e^{-t-s} \int_0^{\min(t,s)} e^{2u} du$$
$$= e^{-t-s}\big(e^{2\min(t,s)} - 1\big)$$

(мы пользуемся изометрией стохастического интеграла). В частности, $D\xi_t = (1 - e^{-2t})$.

Полугруппа Орнштейна-Уленбека $T_t f$ определяется следующим образом:

$$T_t f(x) = \mathbb{E} f(\xi_t).$$

Зная распределение ξ_t, нетрудно написать явное представление T_t

$$T_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x e^{-t} + \sqrt{1 - e^{-2t}} y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Задача 4.29. *Используя явное представление полугруппы Орнштейна-Уленбека доказать следующие ее свойства*

1) (T_t — полугруппа)

$$T_{t+s} f = T_t(T_s f)$$

2) (Генератор T_t) $u(t,x) = T_t f$ является решением параболического уравнения в частных производных

$$u_t = u_{xx} - x u_x, \quad u(0,x) = f(x)$$

3) (Инвариантная мера) стандартное гауссовское распределение $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy$ является инвариантной мерой относительно T_t:

$$\int T_t f \cdot g \ d\gamma = \int f \cdot T_t g \ d\gamma.$$

4) (Эргодическое свойство)

$$\lim_{t\to\infty} T_t f = \int f \ d\gamma.$$

Заметим, что последнее свойство (сходимость к равновесному состоянию) является предметом изучения эргодической теории и статистической физики.

Итак, на примере процесса Орнштейна-Уленбека мы убедились в полезности изучения стохастических дифференциальных уравнений. Стохастическим дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t)dW_t + \beta(\xi_t)dt, \quad \xi_{t_0} = \eta,$$

где η — некоторая случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_{t_0}$. Это уравнение следует понимать как интегральное

$$\xi_t = \eta + \int_{t_0}^{t} \sigma(\xi_s)dW_s + \int_{t_0}^{t} \beta(\xi_s)ds. \tag{10}$$

Функции σ и β носят названия коэффициент диффузии и коэффициент сноса.

Теорема 4.30. *Предположим, что σ и β удовлетворяют условию Липшица, т.е. для некоторой константы K*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \le K|x-y|, \quad |\beta(x) - \beta(y)| \le K|x-y|.$$

Тогда для любого отрезка $[t_0, T]$ и любого начального значения η с $\mathbb{E}\eta^2 < \infty$ существует единственное (с точностью до стохастической эквивалентности) решение (10) на $[t_0, T]$.

Замечание 4.31. *Доказательство ниже приведено для случая $\eta = x_0$, $t_0 = 0$. Доказательство общего случая совершенно аналогично.*

Доказательство. (набросок, подробно см., например, в **Вентцель А.Д.**, Курс теории случайных процессов. М. Наука, 1975.).

Существование. Решения строятся методом последовательных итераций:

$$\xi_t^{(n)} = x_0 + \int_0^t \sigma(\xi_s^{(n-1)})\, dW_s + \int_0^t \beta(\xi_s^{(n-1)})\, ds. \tag{11}$$

С помощью изометрии Ито и неравенства Коши-Буняковского доказываем оценки

$$\mathbb{E}\big|\xi_t^{(1)} - x_0\big|^2 \le CK^2(t + t^2) \le CK^2T(1+t)$$

$$\mathbb{E}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2 \le CK^2(1+t)\int_0^t \mathbb{E}\big|\xi_s^{(n-1)} - \xi_s^{(n-2)}\big|^2\, ds$$

(C зависит только от x_0^2).

Индукция:

$$\mathbb{E}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2 \le (CK^2)^n T \frac{(1+t)^{n+1}}{n!}. \tag{12}$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}^{1/2}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2 < \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}$ сходится в $L^2(P)$. Докажем, что сходимость равномерна по t. Действительно,

$$\begin{aligned} P\Big(\max_t |\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}| \ge 1/2^n\Big) &\le P\Big(\max_{u \le t} \Big|\int_0^u \sigma(\xi_s^{(n)}) - \sigma(\xi_s^{(n-1)})\, dW_s\Big| \ge 1/2^{n+1}\Big) \\ &\quad + P\Big(\max_u \Big|\int_0^u \beta(\xi_s^{(n)}) - \beta(\xi_s^{(n-1)})\, ds\Big| \ge 1/2^{n+1}\Big) \end{aligned}$$

По неравенству Колмогорова для субмартингалов первое слагаемое не превосходит

$$2^{2(n+1)}\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^t \sigma(\xi_s^{(n)}) - \sigma(\xi_s^{(n-1)})\, dW_s\Big|\Big)^2 \le 2^{2(n+1)}K^2 \int_0^t \mathbb{E}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2\, ds.$$

Второе не превосходит (неравенство Чебышева + неравенство Коши-Буняковского)

$$P\Big(\int_0^t |\beta(\xi_s^{(n)}) - \beta(\xi_s^{(n-1)})|\ ds \geq 1/2^{n+1}\Big) \leq 2^{2(n+1)} \mathbb{E}\big(\int_0^t |\beta(\xi_s^{(n)}) - \beta(\xi_s^{(n-1)})|\ ds\big)^2$$
$$\leq 2^{2(n+1)} K^2 t \int_0^t \mathbb{E}\big|\xi_s^{(n)} - \xi_s^{(n-1)}\big|^2\ ds.$$

Равномерная сходимость почти всюду следует из (12) и леммы Бореля-Кантелли.

Итак, $\xi_t^{(n)} \to \xi_t$ в $L^2(P)$ и равномерно на отрезке для почти всех траекторий. Переходя к пределу в (11) (обоснуйте), получаем

$$\xi_t = x_0 + \int_0^t \sigma(\xi_s)\ dW_s + \int_0^t \beta(\xi_s)\ ds.$$

Итак, ξ_t — решение СДУ, траектории непрерывны п.в., ξ_t — $\mathcal{F}_t$-измеримо.

Единственность: пусть есть два различных решения ξ, η.

$$\mathbb{E}|\xi_t - \eta_t|^2 \leq C(K^2, T, x_0) \int_0^t \mathbb{E}(\xi_s - \eta_s)^2\ ds.$$

Единственность следует из леммы: если $0 \leq f(t) \leq C \int_0^t f(s)\ ds$, то $f(s) = 0$. □

4.6. **Уравнение теплопроводности.** В этой лекции мы обсудим связь винеровского процесса с уравнениями в частных производных.

Теорема 4.32. *Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная вместе со своими производными до порядка 2 включительно. Тогда функция*

$$u(t, x) = \mathbb{E}(f(x + W_t))$$

является решением уравнения теплопроводности (heat equation)

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx} \tag{13}$$

с начальным условием $u(0, x) = f(x)$.

Доказательство. Соотношение $u_t = \frac{1}{2} u_{xx}$ следует из явного представления

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + y) e^{-\frac{y^2}{2t}}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + y) p_t(y)\ dy,$$

где

$$p_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}.$$

Явные выкладки показывают, что

$$\frac{d}{dt} p_t = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_t, \quad t \neq 0.$$

Дифференцируя интеграл по параметру и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{d}{dt} u(x, t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + y) p_t(y)\ dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_t(y)\ dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x + y) p_t(y)\ dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x + y) p_t(y)\ dy$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + y) p_t(y)\ dy = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x).$$

Далее, $u(0,x) = \lim_{t\to 0} u(t,x) = \lim_{t\to 0} \mathbb{E}(f(x+W_t)) = \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$ (последнее соотношение также следует из слабой сходимости $p_t(y)dy \to \delta_0$, $t \to 0$).

Для $t = 0$ надо воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t,x)|_{t=0} &= \lim_{t\to 0}\frac{u(t,x)-u(0,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int \big(f(x+y)-f(x)\big)p_t(y)\ dy\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int \big(f(x+\sqrt{t}y)-f(x)\big)p_1(y)\ dy.\end{aligned}$$

Далее, заметим, что $\int yp_1(y)\ dy = 0$, поэтому

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t,x)|_{t=0} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int \big(f(x+\sqrt{t}y)-f(x)-\sqrt{t}f'(x)y\big)p_1(y)\ dy\\ &= \int \frac{1}{2}f_{xx}(x)y^2p_1(y)\ dy = \frac{1}{2}f_{xx}(x).\end{aligned}$$

□

Уравнение теплопроводности является моделью распространения тепла в телах и процесса диффузии (другое название (13) — уравнение диффузии). Рассмотрим узкий длинный цилиндр, направленный вдоль оси x, с жидкостью и взвесью мелких частиц в ней, движущимся согласно закону винеровского процесса. Пусть $f(x,t)\Delta x$ — число частиц, заключенных в участке цилиндра между x и $x+\Delta x$ (f можно интерпретировать как плотность) в момент t. Число частиц в этом участке через малый период времени Δt равно

$$f(x,t+\Delta t)\Delta x = \Delta x\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s,t)p_{\Delta t}(s)ds.$$

Действительно, это следует из того, что частица, находящаяся на расстоянии s от $[x,x+\Delta x]$, попадает туда через промежуток времени Δt с вероятностью $\approx \Delta x\cdot p_{\Delta t}(s)$. Усредняя по вероятности, получаем среднее число частиц. Разлагая в ряд по t выражение в левой части и в ряд по x выражение в правой части, получаем

$$f(x,t)+\Delta t f_t(t,x)+\cdots = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(x,t)-sf_x(x,t)+\frac{1}{2}s^2f_{xx}(x,t)+\cdots\Big)p_{\Delta t}(s)ds.$$

Принимая во внимание, что $\int_{-\infty}^{\infty} sp_{\Delta t}(s)ds = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} s^2p_{\Delta t}(s)ds = \Delta t$, получаем искомое уравнение $f_t(t,x) = \frac{1}{2}f_{xx}(t,x)$.

4.7. **Марковское свойство решений СДУ. Уравнение Колмогорова.** Наша ближайшая задача — вывести обобщение доказанного факта, известного как **уравнение Колмогорова**. Мы не сможет обсудить полное доказательство этого уравнения, так как оно требует применения довольно сложной техники. Поэтому мы ограничимся обсуждением основной идеи доказательства.

Рассмотрим решение дифференциального стохастического уравнения

$$\xi_t = x+\int_0^t \sigma(s,\xi_s)dW_s+\int_0^t b(s,\xi_s)ds. \tag{14}$$

Определим функцию

$$u(t,x) = \mathbb{E}f(\xi_t).$$

Чтобы подчеркнуть, что процесс стартует из точки x, пишут также

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x(f(\xi_t)).$$

По формуле Ито

$$df(\xi_t) = \sigma(t,\xi_t)f'(\xi_t)dW_t + Lf(\xi_t)dt,$$

где

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f_{xx}(x) + b(t,x)f_x(x).$$

Следовательно

$$f(\xi_t) = f(\xi_s) + \int_s^t \sigma(r,\xi_r)f'(\xi_r)dW_r + \int_s^t Lf(\xi_r)dr.$$

Более общим образом, для марковского момента τ имеем

$$f(\xi_\tau) = f(\xi_s) + \int_s^\tau \sigma(r,\xi_r)f'(\xi_r)dW_r + \int_s^\tau Lf(\xi_r)dr.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей получим **формулу Дынкина**

$$\mathbb{E}f(\xi_\tau) = u(s,x) + \mathbb{E}\int_s^\tau Lf(\xi_r)dr$$

(мы учли, что стохастический интеграл является мартингалом и имеет нулевое математическое ожидание).

Пример 4.33. *Пусть τ — первый момент выхода винеровского процесса из отрезка (a,b), $a<0, b>0$. Тогда $\mathbb{E}(b-W_\tau)(W_\tau-a)=0$ по определению τ. По формуле Дынкина*

$$0 = \mathbb{E}(b-W_\tau)(W_\tau-a) = -ab - \mathbb{E}\int_0^\tau \, dt.$$

Следовательно $\mathbb{E}\tau = -ab$.

Замечание 4.34. *Марковские моменты требуют аккуратного обращения. Формально формула Дынкина следует из мартингальности процесса. Аналогично из мартингальности $\int_0^t f dW_s$ и изометрии Ито следуют* **соотношения Вальда***:*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^\tau f dW_s\Big) = 0, \quad \mathbb{E}\Big(\int_0^\tau f dW_s\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\int_0^\tau f^2 ds\Big)^2.$$

Но они выполнены не всегда (например, $\mathbb{E}W_\tau = a \neq 0$, τ — момент достижения процессом W_t точки a). Достаточным условием выполнимости этих равенств является $\mathbb{E}\Big(\int_0^\tau f^2 ds\Big)^2 < \infty$.

Чтобы обосновать рассуждение предыдущего примера, заметим, что для любого $T>0$ имеем

$$\mathbb{E}(\min(\tau,T)) = \mathbb{E}W^2_{\min(\tau,T)} \leq (-a+b)^2$$

(первое равенство вытекает из ограниченности $\min(\tau,T)$). Устремляя T к бесконечности, получаем по теореме о монотонной сходимости, что $\mathbb{E}\tau<\infty$. Отсюда следуют искомые соотношения.

Продолжим обсуждение диффузионных процессов. Выполено следующее **эволюционное** свойство

$$\xi_{t+s}(x) = \xi_s(\xi_t(x)).$$

Из него следует следующая эвристическая формула

$$u(t+s,x) = \mathbb{E}^x f(\xi_{t+s}) = \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{\xi_s}(f(\xi_t))) = \mathbb{E}^x(u(t,\xi_s)).$$

Это **полугрупповое** свойство интуитивно ясно (процесс в момент времени t "забывает" о своем прошлом и развивается далее точно также, как и процесс, стартующий из (случайной!) точки ξ_t). Это одна из форм **марковских** свойств диффузионных процессов. Мы не будем останавливаться на подробных доказательствах, они есть во многих учебниках. Несмотря на интуитивную ясность, технические обоснования утверждений такого рода довольно сложны.

Замечание 4.35. *Введем линейный оператор $T_t f(x) = \mathbb{E}^x f(\xi_t)$ на пространстве функций. Соотношение выше удобно записывать в следующей форме*

$$T_{t+s} f(x) = T_t(T_s f(x)).$$

Применяя полугрупповое свойство и формулу Дынкина, получаем **уравнение Колмогорова**

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= \lim_{s\to 0} \frac{u(t+s,x)-u(t,x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\big(\mathbb{E}^x u(t,\xi_s) - u(t,x)\big)\\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\mathbb{E}^x\Big(\int_0^s Lu(t,\xi_r)dr\Big) = Lu(t,x).\end{aligned}$$

Мы использовали в последнем равенстве соотношение $\xi_t = x$. Итак, функция $u(t,x)$ является решением следующего **уравнения в частных производных**

$$u_t(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)u_{xx}(t,x) + b(t,x)u_x(t,x).$$

4.8. **Теорема Гирсанова.** Диффузионным процессом или процессом Ито будем называть процесс вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,\omega)ds + \int_0^t g(s,\omega)dW_s,$$

где f, g — согласованные случайные процессы. Мы будем интенсивно использовать тот факт, что если $f = 0$, то X_t — мартингал (стохастический интеграл является мартингалом).

Напомним, что по формуле Ито для гладкой функции F выполнено соотношение

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t F_t(s,X_s)ds + \int_0^t F_x(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F_{xx}(s,X_s)d\langle X\rangle_s,$$

где $\langle X\rangle_t = \int_0^t g^2(s,W_s)ds$.

В такой форме формула Ито верна для произвольного **квадратично интегрируемого мартингала** X, т.е. процесса, априори не связанного с винеровским. Под $\langle X\rangle$ подразумевается **квадратичная вариация** процесса X:

$$\langle X\rangle_t = \lim \sum_{i=1}^N (X_{t_{i+1}} - X_{t_1})^2,$$

где предел взят по вероятности по разбиениям $0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_N = t$, с параметром, стремящимся к нулю. Например, для винеровского процесса $\langle W\rangle_t = t$.

Квадратичная вариация, очевидно, является возрастающим процессом, поэтому ее дифференциал определен потраекторно и не содержит мартингальной компоненты.

Мы не будем изучать конструкцию интегрирования по мартингалам (см. Ellion, Kopp глава 6): она интуитивно ясна и повторяет конструкцию интегрирования по винеровскому процессу (в дискретном случае это уже было сделано). Вместо этого мы примем на веру приведенное обобщение формулы Ито. Приведем идею доказательства важной теоремы, показывающей, что на самом деле интегирование по таким мартингалам не слишком сильно расширяет теорию.

Упражнение 4.36. *Докажите, что если процесс*

$$X_t = \int_0^t f(s,\omega)ds,$$

где f — некоторый согласованный процесс, является мартингалом, то $f = 0$.

Теорема 4.37. *Пусть $B_0 = 0$, процессы B_t, $B_t^2 - t$ — мартингалы с непрерывными траекториями. Тогда B_t — винеровский процесс.*

Схема доказательства.

Предположим дополнительно, что B_t — квадратично интегрируемый мартингал. По обобщенной формуле Ито

$$d(B_t^2 - t) = 2B_t dB_t + d(\langle B\rangle_t - t).$$

Заметим, что $B_t^2 - t$ — мартингал по условию, а $\int_0^t B_s dB_s$ — мартингал, так как является стохастическим интегралом. Тогда отсюда следует, что $\langle B\rangle_t = t$ (мы пользуемся тем, что $\langle B\rangle_t$ не содержит мартингальной части).

Достаточно доказать, что

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t-B_s)}) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}.$$

По формуле Ито

$$e^{i\lambda B_t} = e^{i\lambda B_s} + \int_s^t i\lambda e^{i\lambda B_r} dB_r - \frac{1}{2}\int_s^t \lambda^2 e^{i\lambda B_r} dr.$$

Заметим, что интеграл по B_r является мартингалом. Следовательно, $\mathbb{E}(\int_s^t e^{iB_r} dB_r|\mathcal{F}_s) = 0$. Домножим равенство на $I_A e^{-i\lambda B_s}$, где A — множество, измеримое относительно $\mathcal{F}_s$, и возьмем мат. ожидание.

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t-B_s)} I_A) = P(A) - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \mathbb{E}(I_A e^{i\lambda(B_r - B_s)})dr.$$

Полученное дифференциальное уравнение имеет решение

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda(B_t-B_s)} I_A) = P(A)e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}.$$

Отсюда вытекает искомое равенство.

Лемма 4.38. *Пусть Q — вероятностная мера, $Q = \Lambda \cdot P$, $\Lambda_t = \mathbb{E}^P(\Lambda|\mathcal{F}_t)$. Тогда X_t — мартингал относительно Q, если $X_t \cdot \Lambda_t$ — мартингал относительно P.*

Доказательство. Пусть $A_s \in \mathcal{F}_s$. Результат вытекает их соотношения

$$\begin{aligned}\int_{A_s} X_t dQ &= \int_{A_s} X_t \Lambda_T dP = \int_{A_s} X_t\Lambda_t dP = \int_{A_s} X_s \Lambda_s dP\\ &= \int_{A_s} X_s \Lambda_T dP = \int_{A_s} X_s dQ.\end{aligned}$$

□

Основным инструментом работы с мерами, абсолютно непрерывными относительно мартингальных, в случае с непрерывного времени является теорема Гирсанова.

Теорема 4.39. (И.В. Гирсанов). *Пусть θ_t — согласованный процесс со свойством $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ п.в. Предположим, что*

$$\Lambda_t = \exp\Bigl(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\Bigr)$$

— мартингал. Определим новую меру $Q = \Lambda_T \cdot P$. Тогда процесс

$$B_t = W_t + \int_0^t \theta_s \, ds$$

является винеровским относительно Q.

Замечание 4.40. *Формальное применение формулы Ито показывает, что процесс Λ_t должен быть мартингалом (потому что его стохастический дифференциал не содержит dt-компоненту). Единственным препятствием к этому может быть отсутствие интегрируемости Λ_t. Стандартное достаточное условие для того, чтобы Λ_t был мартингалом: $\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds}) < \infty$.*

Доказательство. Так как $\Lambda_0 = 1$ и Λ_t — мартингал, то $\mathbb{E}(\Lambda_t) = 1$. Так как $\Lambda_t > 0$, то мера Q — вероятностная.

Из формулы Ито следует:

$$\Lambda_t = 1 - \int_0^t \Lambda_s \theta_s \, dW_s.$$

Согласно предыдущей теореме, нам достаточно доказать, что B_t и $B_t^2 - t$ — локальные мартингалы относительно Q.

Докажем, что B_t — мартингал относительно Q. Достаточно доказать (согласно предыдущей лемме), что $B_t \cdot \Lambda_t$ — локальный мартингал относительно P. Последнее достигается путем вычисления стохастических дифференциалов.

$$d(B_t \cdot \Lambda_t) = (dW_t + \theta_t dt)\Lambda_t - B_t(\Lambda_t \theta_t dW_t) - (dW_t + \theta_t dt)(\Lambda_t \theta_t dW_t) = \Lambda_t(1 - B_t\theta_t) dW_t.$$

По формуле Ито $B_t^2 - t$ имеет представление

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s.$$

Но так как B_t — (локальный) мартингал относительно Q, а стохастические интегралы являются (локальными) мартингалами, то $B_t^2 - t$ — (локальный) мартингал относительно Q. □

4.9. **Модель Блэка-Шоулза.** Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, поток σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, s < t$, винеровский процесс W_t, согласованный с $\mathcal{F}_t$.

Цена актива задается стохастическим уравнением

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

где $\mu, \sigma > 0$ — некоторые константы. В интегральном виде

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей, получим

$$\mathbb{E}S_t = S_0 + \mu \int_0^t \mathbb{E}(S_s) ds.$$

Или $\mathbb{E}S_t = S_0 e^{\mu t}$. Т.е. величина μ характеризует тренд актива.

Параметр σ называется волатильностью и имеет смысл меры "подвижности" акции.

Решение уравнения (проверка с помощью формулы Ито)

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}.$$

Безрисковый актив:

$$B_t = e^{rt}.$$

Самофинансируемый портфель:

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t.$$

Эквивалентная мартингальная мера. По теореме Гирсанова процесс

$$\tilde{W}_t = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t$$

является винеровским относительно меры

$$\tilde{P} = e^{cW_T - \frac{c^2}{2}T} \cdot P, \quad c = \frac{r-\mu}{\sigma}.$$

Положим $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$. Согласно формуле Ито

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t,$$

следовательно **существует мера $\tilde{P}$, относительно которой процесс $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ является мартингалом.**

Как мы видели, в дискретном случае с конечным временем это эквивалентно отсутствию арбитража. В общем случае соотношение между этим двумя концепциями более тонкие. Существование эквивалентной мартингальной меры равносильно так называемому **No Free Lunch** condition. Мы не обсуждаем в этих лекциях, что такое арбитраж в общем случае. Вместо этого мы будем следовать схеме дискретного случая: 1) нахождение риск-нейтральной меры, т.е. меры относительно которой наша модель актива является мартингалом, 2) вычисление цены деривативa путем нахождения мартингала (относительно риск-нейтральной меры), совпадающего в момент истечения с заданной случайной величиной $\phi(S_T)$.

Теорема 4.41. (Полнота.) *Каждый актив $\phi(S_T)$ воспроизводим для ограниченной функции ϕ.*

Доказательство. Задача сводится к нахождению такого процесса α_t, что

$$d\tilde{V}_t = \alpha_t d\tilde{S}_t$$
$$\tilde{V}_T = \Psi(\tilde{S}_T), \quad \Psi(x) = e^{-rT}\psi(e^{rT}x).$$

Будем искать $\tilde{V}$ в виде

$$\tilde{V} = f(t, \tilde{S}_t).$$

По формуле Ито

$$d\tilde{V}_t = f_t(t,\tilde{S})dt + f_x(t,\tilde{S})d\tilde{S}_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\tilde{S})\sigma^2 \tilde{S}_t^2 \ dt.$$

Таким образом, f находится из решения уравнения в частных производных

$$f_t(t,x) + \frac{\sigma^2}{2} f_{xx}(t,x) x^2 = 0,$$
$$f(T,x) = \Psi(x)$$

□

Альтернативное доказательство: вероятностное представление решения:

$$\tilde{V}_t = \tilde{\mathbb{E}}(\Psi(\tilde{S}_T)|\mathcal{F}_t).$$

Применяя явную формулу для $\tilde{S}_t$, получаем

$$\tilde{S}_T = \tilde{S}_t \cdot e^{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}.$$

Заметим, что $\tilde{W}_T - \tilde{W}_t$ не зависит от $\mathcal{F}_t$ и имеет нормальное распределение (относительно $\tilde{P}$ со средним ноль и дисперсией $T-t$). Следовательно,

$$\tilde{V}_t = f(t, \tilde{S}_t),$$

где

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(xe^{\sigma y\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

В частности, получаем следующий результат.

Теорема 4.42. *Цена опциона определяется по формуле*

$$V_0 = f(0, S_0)$$

Заметим, что итоговая формула не зависит от параметра μ.

Для опциона типа call

$$f(0, S_T) = \max(0, S_T - K).$$

Параметр K называется страйком. Он равен цене, по которой можно приобрести актив в момент реализации (expiration) T.

Расписывая математическое ожидание, мы получаем

$$V_0 = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} f\Big(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x}\Big) e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx, \quad f(x) = \max(0, x-K).$$

Точные вычисления приводят к так называемой формуле **Блэка-Шоулза** или **Блэка-Шоулза-Мертона** (Black-Scholes-Merton).

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{15}$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

а Φ — функция распределения нормальной гауссовой с.в.

Замечание 4.43. *Формулу Блэка-Шоулза можно вывести другими способами.*

1) С помощью центральной предельной теоремы как предел дискретной модели Кокса-Росса-Рубинштейна.

2) В исходной работе Блэка-Шоулза отправным пунктом было явное описание риск-нейтрального портфеля Π *(так называемое хеджирование).*

Положим:

$$\Pi = -V + \Delta S.$$

Портфель Π "самофинансируем", т.е.

$$d\Pi = -dV + \Delta dS$$

Формула Ито:

$$dV = \big(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{xx} + \mu S_t V_x\big)dt + \sigma S_t V_x dW_t.$$

Таким образом

$$d\Pi = \big(\Delta\mu S_t - (V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{xx} + \mu S_t V_x)\big)dt + (\Delta\sigma S_t - \sigma S_t V_x)dW_t.$$

Следовательно,

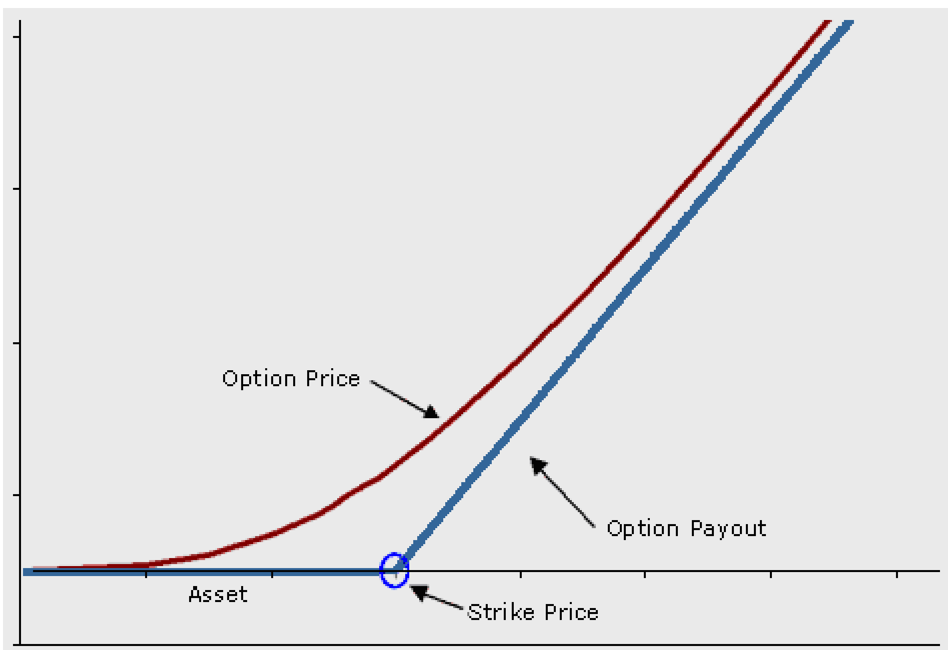
$$\Delta = V_x(t, S_t),$$

$$V_x\mu S_t - (V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{xx} + \mu S_t V_x) = r(-V + V_x S_t).$$

Получаем **уравнение Блэка-Шоулза**

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} + rxV_x - rV = 0, \quad V(0,x) = V_0.$$

Цена опциона типа call в моменты T и $t < T$, посчитанная по формуле Блэка-Шоулза



Список литературы

[1] Оксендаль Б., Стохастические дифференциальные уравнения. 2003.
[2] Bouchaud J.-P., Potters M., Theory of financial risk. Cambrige. University Press. 2000.
[3] Bougerol F., Modèles stochastique et application a là finance.
[4] Elliot R.J., Kopp P.E., Mathematics of financial markets, 2004.
[5] Nelsen R.B., An introduction to copulas, 2006.
[6] Pliska S.R., Introduction to mathematical finance, 1997.
[7] Wilmott P., Paul Wilmott On Quantitative Finance, 2006. J. Wiley&sons