Лекция 13. Потенциалы и спектр оператора Лапласа.

1 Ньютоновский потенциал.

Определение 1 *Ньютоновский потенциалс плотностью ρ, распределнный в области Ω - это*

$$u(x) = \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\xi - x} d\xi.$$

Теорема 1 *Пусть Ω компактно. Тогда:*

1. $\Delta u = -4\pi\rho$ *в* Ω, $\rho|_\Omega \in C^2(\Omega)$.
2. $\Delta u = 0$ *вне* Ω.
3. u *непрероывно в* $\mathbb{R}^3$.
4. $u \to 0$ *на* ∞.

Доказательство

1. Это утверждение доказано в D' на прошлой лекции. Его доказательство в C^2 ниже.
2. Следует из гармоничности ньютоновского потенциала вне нуля.
3. Следует из принадлежности $u \in L^1_{\text{loc}}$.
4. Следует из того, что $\frac{1}{r} \to 0$ на ∞.

$\square$

2 Потенциал равномерно заряженного шара.

Задача 1 *Найти этот потенциал.*

Сделано на лекции.

3 Функция Грина для уравнения Лапласа.

Теорема 2 *Пусть Ω - компактная область с гладкой границей. Тогда существует функция $GF : \Omega \setminus D \to \mathbb{R}$, ($D$ - диагональ):*

1. $\Delta G = id$ *на* C^2, *где* G *- интегральный оператор* $C \to C$,
$$Gf(x) = \int_\Omega G(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$
2. $G|_{\partial\Omega \times \Omega \setminus D} = 0$
3. $G(x,\xi) = G(\xi, x)$.

Доказательство Пусть E - фундаментальное решение уравнения Лапласа:
$$\Delta E = \delta.$$
Будем искать G в виде
$$G(x,\xi) = E(x-\xi) + u(x,\xi), \tag{1}$$
где u - гладкая функция в $\Omega \times \Omega$ и непрерывная в $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. Чтобы выполнить требование 2, потребуем: $\forall \xi \in \Omega,\ x \in \partial\Omega$:
$$u(x,\xi) = -E(x-\xi), \tag{2}$$
$$\Delta_x u = 0. \tag{3}$$
при каждом ξ получается задача Дирихле для уравнения Лапласа по x с граничными условиями, гладкими по ξ.

Теорема 3 *Задача* (2), (3) *разрешима, и ее решение гладко зависит от* ξ.

Схема доказательства этой теоремы будет дана на следующей лекции.
Из (1), (3) следует:
$$\Delta_x G(x,\xi) = \delta(x-\xi). \tag{4}$$
Из (2) следует требование 2. Из (2) и леммы о гладкости следует 1.
Наконец, 3 следует из 1 и симметрии оператора Лапласа.

□

4 Спектр оператора Лапласа.

Рассмотрим оператор Лапласа Δ в $C^2(\Omega) = \{f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) | f|_{\partial\Omega} = 0\}$. Пространство $C_0^2(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Оператор Лапласа переводит $C_0^2(\Omega)$ в $C_0(\Omega)$. Обратный оператор G действует на $C_0(\bar{\Omega})$.

Оператор G симметричен и коммутативен в Ω при $n = 2$ и 3, поскольку в этих случаях фундаментальное решение принадлежит L_2.

Теорема 4 *Оператор Лапласа на $C_0^2(\Omega)$ имеет дискретный спектр; его собственные значения вещественны и стремятся к бесконечности.*

Доказательство Теорема следует из того, что оператор Лапласа на C_0^2 имеет симметричный и компактный обратный оператор и из теоремы Гильберта-Шмидта. $\square$