Лекция 12 Фундаментальные решения.

1 Много переменных.

Основные определения теории обощенных функций для многих переменных давались в качестве задачи.

2 Определения.

Определение 1 *$LE = \delta$, E - фундаментальное решение оператра L*

$$LE_\xi(x) = \delta(x - \xi) := \delta_\xi.$$

3 Применение.

Теорема 1 *Пусть f непрерывна, $E_\xi \in L^1_{loc}$, и $u(x) = \int E_\xi(x) f(\xi) d\xi$. Тогда*

$$Lu = f,$$

в смысле обобщенных фуекций.

Доказательство Эвристика.

$$L_x u = \int L_x E_\xi(x) f(\xi) d\xi = \int \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x).$$

Строгость.

$$(L_x u, \varphi) = (u, {}^t L_x \varphi) = \int {}^t L_x \varphi(x) dx \int E_\xi(x) f(\xi) d\xi = \int \left(\int {}^t L(x) \varphi(x) E_\xi dx \right) f(\xi) d\xi =$$

$$\int f(\xi)(E_\xi, {}^t L_x \varphi) d\xi = \int f(\xi)(L_x E_\xi, \varphi) d\xi = \int f(\xi)(\delta(x-\xi), \varphi) d\xi = \int f(\xi)\varphi(\xi) d\xi = (f, \varphi).$$

Итак, $(L_x u, \varphi) = (f, \varphi)$. □

Замечание 1 *Если L - оператор с постоянными коэффициентами, то $E_\xi(x) = E(x-\xi)$. Можно брать и $E(\xi - x)$. Тогда*

$$u = E_\xi * f.$$

4 Фундаментальные решения линейных уравнений.

$$L_x = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = \delta(x-\xi)$$

Положим:

$$E_\xi(x) = \begin{cases} y_1(x), \ x \le \xi \\ y_2(x), \ x \ge \xi \end{cases}$$

$$E_\xi \in C^{n-2}, \ D^{n-1}E_\xi \text{ кусочно непрерывна и } D^{n-1}(E_\xi(\xi+0)) = D^{n-1}E_\xi(\xi-0)+1.$$

$$L_x = D_x L_1, \ L_1 E_\xi = \text{ const } + \theta_\xi.$$

$$L_x E_\xi = D_x L_1 E\xi = D_x \theta_\xi = \delta_\xi.$$

5 Общее замечание.

Предложение 1 *Пусть f_n - δ-образная последовательность, $L = p(D)$, и $Lu_n = f_n$, $u_n \in L^1_{loc}$, $u_n \to u$ в L_1. Тогда u - фундаментальное решение оператора L.*

Доказательство Обобщенные функции сходятся вместе с производными. Если

$$u_n \to u \text{ в } L^1,$$

то

$$u_n \to u \text{ в } D'.$$

Значит,

$$Lu_n \to Lu \text{ в } D'.$$

Но

$$Lu_n = f_n \to \delta \text{ в } D'.$$

Следовательно,

$$Lu = \delta.$$

□

6 Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Теорема 2 *Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$ пропорционально гармонической в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функции, зависящей только от радиуса.*

Рассмотрим функцию

$$u_1(r) = \begin{cases} -r^{2-n}, \ r \geq 1 \\ c_1 + c_2 r^2, \ r \leq 1. \end{cases}$$

Константы c_1 и c_2 подобраны так, что $u_1 \in C^1$. Отсюда следует: $c_2 = \frac{n-2}{2}$; значение c_1 будет несущественно для дальнейшего. Имеем:

$$\Delta u_1 = 2nc_2 \chi_{B(0,1)} := f_1.$$

Положим:

$$u_m = m^{n-2} u_1(mr).$$

Множитель m^{n-2} обеспечивает равенство

$$u_m = u_{m'} = r^{2-n} \text{ при } r > \frac{1}{\min(m, m')}.$$

Задача 1 *$u_m \to r^{2-n}$ в D'.*

Доказательство Докажем, что последовательность $f_m = \Delta u_m$ пропорциональна δ-образной. Имеем:

$$\Delta u_m = m^n \Delta u_1 \chi_{B(0,\frac{1}{m})} = f_m.$$

$\int u_m$ не зависит от m и равен $n(n-2)v_n = (n-2)\sigma_n$, где v_n - объем единичного шара, σ_n - площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

В силу предложения 1,

$$-\Delta r^{2-n} = (n-2)\sigma_n \delta(x),$$

где $r = |x|$. □

Следствие 1 *Фундоментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$ имеет вид:*

$$E(x) = \frac{1}{(2-n)^{\sigma_n}} r^{2-n}, \ r = |x|.$$

При $n = 3$,

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi r}.$$