Занятие 13. Функция Грина и спектр оператора Лапласа

1. Доказать теорему 1 лекции 13 для логарифмического потенциала.

2. Найти логарифмический потенциал равномерно заряженного диска на плоскости.

3. Найти фундаментальное решение линейного оператора $X \mapsto -X'' + X$.

4. Написать явное выражение для функции Грина оператора Лапласа на единичном круге с граничными условиями Дирихле.

5. Решить задачу Неймана на единичном круге:

$$\Delta u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = g(\varphi).$$

6. Найти собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике.

7. Используя ортогональность собственных функций оператора Лапласа в круге по мере Лебега, доказать ортогональность функций Бесселя $J_k(\alpha_n r)$ и $J_k(\alpha_m r)$ (где α_m и α_n - различные корни J_k) по мере rdr.

8. Доказать, что все собственные функции оператора Лапласа в круге найдены на лекции 6.

   Указание 1 *Разложить собственную функцию в ряд Фурье по φ и доказать, что каждый член разложения - собственная функция.*

9. Доказать, что оператор Лапласа на $C_0^2(\Omega)$ самосопряжен, и

$$(\Delta u, v) = \int_\Omega (\text{grad } u, \text{grad } v).$$

Решено на занятии: 2, 4, 6

На дом: 1*, 3, 7, 8