

Лекция 11 Обобщенные функции.

1 Идея: рассматривать функции как функционалы:

$$(f, \varphi) = \int f\varphi, \quad \varphi - \text{пробная.}$$

Задача 1 Непрерывная функция однозначно восстанавливается по своим значениям на пробных $\varphi \in C^0$.

Определение 1 Носитель функции - минимальное замкнутое множество, вне которого функция равна нулю. Функция с компактным носителем называется финитной.

2 Пространство основных (пробных) функций.

Определение 2 D -пространство C_0^∞ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Определение 3 Сходимость на D :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ в } D \Leftrightarrow \varphi_n^{(k)} \Rightarrow \varphi^{(k)}, \quad (1)$$

и существует K - компакт:

$$\text{supp } f_n \subset K. \quad (2)$$

Определение 4 Пусть f непрерывна или $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Тогда

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi dx. \quad (3)$$

Предложение 1 Функционал (3) слабо непрерывен.

Пример 1 Если не требовать (2), то предложение неверно.

3 Свойства пространства D .

Предложение 2 Пространство D непусто и всюду плотно в C_0 .

Доказательство

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \xi e^{-\frac{1}{x}} \in C^\infty \\ \psi(x) &= \varphi_0(x)\varphi_0(1-x) \in D \\ I &= \int_{\mathbb{R}} \psi dx \\ \psi_n &= \frac{n\psi(nx)}{I}\end{aligned}\tag{4}$$

□

Предложение 3 Для определенных выше функций ψ_n имеем: $\forall f \in C_0, f_n = \psi_n * f \in D$, и $f_n \rightrightarrows f$ на \mathbb{R} .

Отсюда следует Предложение 2.

4 Определение обобщенных функций.

Определение 5 Обобщенная функция - это линейный слабо непрерывный функционал на пространстве основных функций.

Пример 2 Функция f из L^1_{loc} ; формула (3) задает регулярную обобщенную функцию.

Пример 3 δ -функция

$$(f, \varphi) = \varphi(0).$$

Пример 4 $(f, \varphi) = \tilde{\varphi}(i)$, где $\tilde{\varphi}$ - преобразование Фурье функции φ .

5 Сходимость обобщенных функций: слабая на D .

Определение 6 δ -образная последовательность (см. конспект лекций или курс анализа)

Задача 2 Пусть ψ_n - последовательность (4). Тогда $\psi_n \rightarrow \delta$ в D' .

Пространство всех обобщенных функций со слабой сходимостью обозначается D' .

6 Дифференцирование обобщенных функций.

Все обобщенные функции бесконечно дифференцируемы (!).

Идея: Берем регулярную обобщенную функцию, дифференцируем и смотрим, что получится. Пусть $f \in C^1 : (f', \varphi) = \int f' \varphi = - \int f \varphi' = -(f, \varphi')$.

Определение 7 Пусть $f \in D'$. Тогда

$$f' : (f' \varphi) = -(f, \varphi').$$

Сходимость.

Предложение 4 Обобщенные функции всегда сходятся со всеми производными.

Доказательство Следует из определений. □

Задача 3 $\delta = \chi'$, где χ' - функция Хэвисайда,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Задача 4 Пусть $f_n \rightarrow f$ в L^1_{loc} . Тогда $f_n \rightarrow f$ в D' .

7 Связь обобщенных функций с регулярными.

Теорема 1 Пусть $f' = 0$ в D' . Тогда $f = c$, $(f, \varphi) = c \int \varphi$.

Доказательство Пусть $\varphi_0 \in D$ - функция с ненулевым интегралом.

1. Тогда функция $\psi = \varphi - \varphi_0 \int \varphi$ имеет нулевой интеграл по \mathbb{R}^1 и, значит, является производной для некоторой функции $\Psi \in D : \psi = \Psi'$, $\Psi'(x) = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy$. Тогда $\varphi = \varphi_0 \int \varphi + \psi'$, и

$$(f, \varphi) = (f, \varphi_0) \int \varphi + (f, \Psi') = \int (f, \varphi_0) \varphi.$$

Значит, $f = (f, \varphi_0)$ и действует на основных функциях как умножение на константу $c = (f, \varphi_0)$. □

Следствие 1 Пусть $f \in D'$, $f' = g$ в D' , причем функция g непрерывна. Тогда $f \in C^1$, и $f' = g$ в C .

Доказательство Пусть G - первообразная для g . Тогда $G \in C^1$, и $(f - G)' = 0$ в D' . Следовательно, $f - G = \text{const}$, $f' = G' = g$ в C . □