Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Факультет математики ВШЭ, 2017 г. 2 семестр

Лекция 15 (21 марта 2017)

§1. Интеграл Фурье. Основная теорема

На прошлых лекциях были установлены условия, при выполнении которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т. е. представлена в виде суперпозиции гармонических колебаний. Попытаемся сделать что-то аналогичное для непериодических функций. Мы покажем, что похожее представление возможно при определенных условиях, но только не в виде ряда Фурье, а в виде интеграла Фурье.

Сначала приведем некоторые наводящие соображения. Пусть функция f на каждом интервале удовлетворяет условиям, обеспечивающим ее разложимость в ряд Фурье. Иначе говоря, пусть f суммируема на любом конечном интервале и в каждой точке выполнено условие Дини. Рассматривая f, скажем, на отрезке $[-\ell, \ell]$, мы можем написать ее разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x]. \tag{1}$$

Подставим сюда выражения для коэффициентов a_k и b_k:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt,\ \ a_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}tdt,\ \ b_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}tdt.$$

Получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}x\cos\frac{k\pi}{\ell}tdt + \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}x\sin\frac{k\pi}{\ell}tdt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{\ell}x\cos\frac{k\pi}{\ell}t + \sin\frac{k\pi}{\ell}x\sin\frac{k\pi}{\ell}t\right]dt.$$

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Преобразовывая последнее выражение, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt. \qquad (2)$$

Дополним предположения о функции f еще одним: пусть эта функция абсолютно интегрируема на всей оси, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < +\infty. \qquad (3)$$

Перейдем в равенстве (2) к пределу при $\ell \to \infty$ (пока формально). Тогда в силу (3), первое слагаемое в правой части (2) стремится к нулю. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)\Delta\lambda$$

(распространенную на бесконечный промежуток) для интеграла

$$\int\limits_{0}^{\infty} F(\lambda)d\lambda \quad \text{от функции} \quad F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\lambda(t-x)dt,$$

если положить $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $\Delta\lambda = \frac{\pi}{\ell}$.

Поэтому формально в пределе при $\ell \to \infty$ получим равенство:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \qquad (4)$$

Это и есть искомое представление. Введем обозначения:

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt,\ b_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$$

Тогда равенство (4) можно переписать в следующем виде, аналогичном ряду Фурье:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\sin\lambda x)d\lambda. \qquad (5)$$

Это равенство называется интегралом Фурье или формулой Фурье. Теперь докажем эту формулу строго.

Теорема 1 *Если функция f абсолютно интегрируема на всей прямой и в точке x удовлетворяет условию Дини, то имеет место равенство:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda(t-x)dt.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A d\lambda \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{6}$$

Хотим проверить, что $\lim_{A\to\infty} J(A)$ существует и равен $f(x)$. Поскольку f абсолютно интегрируема, то внутренний интеграл в (6) сходится, а двойной интеграл сходится абсолютно. Используя теорему Фубини, изменим порядок интегрирования в (6):

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty dt \int\limits_0^A f(t)\cos\lambda(t-x)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt.$$

Сделаем замену переменных $t - x = z$ и приведем этот интеграл к виду:

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(x+z)\frac{\sin Az}{z}dz. \tag{7}$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin Az}{z}dz = 1 \ (A > 0) \qquad \text{(интеграл Дирихле)}.$$

(сделав замену $Az = u$, легко проверить, что левая часть не зависит от A). Тогда разность $J(A) - f(x)$ запишем в виде:

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\,dz. \tag{8}$$

Представим это выражение в виде суммы трех слагаемых:

$$J(A)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^N \frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az dz + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|z|\geq N} \frac{f(x+z)}{z}\sin Az dz - \frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{|z|\geq N}\frac{\sin Az}{z}dz.$$

Второй и третий члены справа представляют собой сходящиеся интегралы, и каждый из них можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, если число N достаточно велико. Первое слагаемое справа (при фиксированном N) стремится к нулю, когда $A \to \infty$ (в силу леммы Римана из Лекции №6 и условия Дини). Таким образом, получаем, что

$$\lim_{A\to\infty}(J(A) - f(x)) = 0,$$

что и требовалось ■

§2. Интеграл Фурье в комплексной форме

В интегральной формуле Фурье (4) внутренний интеграл представляет собой четную функцию от λ, что позволяет переписать эту формулу в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \tag{9}$$

Далее, из абсолютной интегрируемости f следует, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt$$

существует и является нечетной функцией λ. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt = 0. \tag{10}$$

Этот интеграл следует понимать в смысле главного значения, т. е. как $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N}$.

Прибавим к (9) равенство (10), умноженное на $-i$. Ввиду того, что $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt.$$

Это равенство называется <u>комплексной формулой Фурье</u> (в смысле главного значения).

§3. Преобразование Фурье и формула обращения

Интегральную формулу Фурье можно расчленить на два равенства. Положим

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{1}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{2}$$

Отметим, что формула (1) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции f. Таким образом, каждой функции $f \in L_1(-\infty, \infty)$ мы с помощью формулы (1) сопоставляем определенную функцию $g(\lambda)$, заданную при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Функция $g(\lambda)$ называется <u>преобразованием Фурье</u> исходной функции $f(x)$. Формула (2) выражает функцию f через ее преобразование Фурье. Она называется <u>формулой обращения</u> для преобразования Фурье. Обратим внимание на сходство между формулами (1) и (2). Они отличаются друг от друга только знаком в показателе экспоненты и множителем $\frac{1}{2\pi}$ перед интегралом.

Однако при всем сходстве формул (1) и (2), они, по существу, различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле Лебегу (поскольку $f \in L_1(-\infty, \infty)$), а во второй, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (1) это <u>определение</u> функции g, а равенство (2), представляющее собой иную формулу записи формулы Фурье, содержит <u>утверждение</u>, что стоящий справа интеграл сходится к исходной функции f. Как мы видели выше, для обеспечения этого равенства на f надо наложить, помимо суммируемости, еще дополнительные условия, например, условие Дини.

Лекция 16 (4 апреля 2017)

§1. Однозначность преобразования Фурье и примеры

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Мы определили преобразование Фурье функции f:

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt. \tag{1}$$

Помимо этого, мы установили, что при выполнении условия Дини в точке x имеет место формула обращения преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) аналогичны тому, что мы имеем для рядов Фурье. Действительно, коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

определены для всякой $f \in L_1[-\pi,\pi]$, однако сходимость ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

к функции $f(x)$ (играющую здесь роль формулы обращения) можно гарантировать лишь при выполнении определенных условий (например, при условии Дини).

Вместе с тем, для преобразования Фурье имеет место следующее

Утверждение 1 *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и выполнено*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = 0 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \qquad (\textit{преобразование Фурье от } f).$$

Будем дополнительно предполагать, что функция $f(x)$ является кусочно непрерывной на каждом конечном интервале. Тогда $f(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. Из предполагаемого равенства, очевидно, вытекает, что для любых $t, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx = 0.$$

Положим теперь $\varphi(x) = \int\limits_0^{\xi} f(x+t)dt$, где ξ – произвольное фиксированное число. Применяя теорему Дини и используя условия, наложенные на функцию f, легко видеть, что функция φ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет тому же интегральному условию, что и функция $f(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx = 0 \quad \text{(преобразование Фурье от } \varphi)$$

при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Но, как легко видеть, функция $\varphi(x)$ имеет кусочно непрерывную производную, которая равна $f(x)$ в точках непрерывности x функции f. В частности, эта функция почти всюду удовлетворяет условию Дини. Поэтому, в силу Теоремы 1 из прошлой лекции, имеет место формула обращения, и, следовательно, функция $\varphi(x)$ почти всюду обращается в ноль, т. к. ее преобразование Фурье равно нулю. Кроме того, $\varphi(x)$ непрерывна, так что $\varphi(x) \equiv 0$. Следовательно, при любом $\xi \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{0}^{\xi} f(t)dt = 0.$$

Значит, $f(x) = 0$ почти всюду. ■

Следствие 1 *Преобразование Фурье однозначно определяет функцию f.*

Рассмотрим некоторые примеры преобразования Фурье:

Пример 1 *Пусть* $f(x) = e^{-a|x|},\ a > 0.$

Найдем преобразование Фурье этой функции:

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)dx = \ = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-a}\cos\lambda x dx.$$

После двукратного интегрирования по частям, находим

$$g(\lambda) = \frac{2a}{\lambda^2 + a^2}.$$

Пример 2 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le a, \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Пример 3 $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\frac{dx}{x^2+a^2}.$$

Далее можно вычислять явно, а можно воспользоваться формулой обращения для Примера 1:

$$e^{-a|x|}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2a}{\lambda^2+a^2}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Поменяем в этой формуле x на $-\lambda$, а λ на x и получим

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|}.$$

Пример 4 $f(x)=e^{-ax^2}$, $a>0$.

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos\lambda x dx \quad \text{(в силу четности } f(x)\text{)}.$$

Дифференцируем по λ:

$$\frac{d}{d\lambda}g(\lambda)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}x\sin\lambda x dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x d\left(\frac{e^{-ax^2}}{2a}\right)=$$

$$=\frac{\sin\lambda x\cdot e^{-ax^2}}{2a}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\lambda\cos\lambda x dx=-\frac{\lambda}{2a}g(\lambda)\Rightarrow\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}+\frac{\lambda}{2a}g(\lambda)=0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln g(\lambda)=-\frac{\lambda}{2a}=\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{\lambda^2}{4a}\right).$$

$$g(\lambda)=Ce^{-\lambda^2/4a}.$$

Найдем C подстановкой $\lambda=0$:

$$C=g(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Последний интеграл называется <u>интегралом Пуассона</u> или <u>интегралов Гаусса</u>. Таким образом,

$$g(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\lambda^2/4a}.$$

Возьмем $a=\frac{1}{2}$, $f(x)=e^{-x^2/2}$, $g(\lambda)=\sqrt{2\pi}e^{-\lambda^2/2}$. Это собственная функция преобразования Фурье: преобразование Фурье переводит ее в себя (с точностью до множителя).

§2. Основные свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье функции f будем обозначать через $F[f]$. Иначе говоря, F – это линейный оператор, определенный на пространстве $L_1(\mathbb{R})$ и ставящий в соответствие каждой функции этого пространства ее преобразование Фурье (при этом оно, вообще говоря, не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$, см. Пример 2).

Утверждение 2 *Если последовательность $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ сходится в метрике пространства $L_1(\mathbb{R})$, то последовательность их преобразований Фурье $F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_\lambda$.*

Доказательство. Равномерная сходимость $F[f_n]$ вытекает из очевидной оценки

$$|F[f_n](\lambda) - F[f_m](\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx.$$

■

Утверждение 3 *Преобразование Фурье $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.*

Доказательство. Ограниченность функции $g = F[f]$ сразу следует из оценки

$$|g(\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Далее, если f – характеристическая функция интервала (a, b), то для нее

$$g(\lambda) = \int\limits_a^b e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$

Эта функция, очевидно, непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Ввиду того, что оператор F линеен, отсюда вытекает, что преобразование Фурье любой элементарной функции (т. е. линейной комбинации характеристических функций интервалов) также является непрерывной функцией, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

Наконец, элементарные функции всюду плотны в $L_1(\mathbb{R})$, поэтому для $f \in L_1(\mathbb{R})$ найдется последовательность $\{f_n\}$ элементарных функций, сходящаяся к f в $L_1(\mathbb{R})$. Тогда, в силу Утверждения 1, последовательность $g_n(\lambda) = F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_\lambda$ к функции $g(\lambda) = F[f](\lambda)$. Значит, предельная функция g тоже непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. ■

Утверждение 4 *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, функция f имеет кусочно непрерывную производную на каждом конечном интервале, и при этом $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то имеет место равенство*

$$F[f'] = i\lambda F[f].$$

Иными словами, дифференцированию функции отвечает домножение ее преобразования Фурье на $i\lambda$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница, функцию $f(x)$ можно записать в виде:

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt.$$

Из абсолютной интегрируемости f' следует, что стоящее здесь справа выражение имеет пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Эти пределы могут быть только нулевыми, т. к. иначе $f(x)$ не была бы интегрируемой на $\mathbb{R}$. Учитывая это, получаем с помощью интегрирования по частям:

$$F[f'] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda F[f].$$

■

Следствие 2 *Если f такова, что $f^{(k-1)}$ имеет кусочно непрерывную производную на каждом конечном интервале и, при этом $f, f', \ldots, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f].$$

§3. Связь между степенью гладкости функции и скоростью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье

Напомним,что преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому из приведенного выше тождества получаем, что

$$|F[f](\lambda)| = \frac{\left|F[f^{(k)}](\lambda)\right|}{|\lambda|^k} \to 0 \ (|\lambda| \to \infty),$$

т.е. $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее чем $|\lambda|^{-k}$, если известно, что функции $f(x)$ имеет суммируемые производные до порядка k. Значит, чем больше производных имеет функция f, тем быстрее убывает по λ ее преобразование Фурье.

Следствие 3 *Если существуют суммируемые производные f' и f'', то $F[f] \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$.*

Действительно, из указанных условий вытекает, что $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $|\lambda|^{-2}$, и, следовательно, является суммирумой функцией.

Выше было показано, что чем больше производных имеет функция f, тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье. Справедливо также и "двойственное" свойство.

Утверждение 5 *Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ являются суммируемыми, тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ дифференцируема при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, причем*

$$g'(\lambda) = F\left[(-ix)f(x)\right](\lambda). \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, продифференцируем по λ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

который определяет функцию $g(\lambda)$, и получим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

который, в силу условия $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$ сходится равномерно по λ. Следовательно, производная от функции $g(\lambda)$ существует и имеет место равенство (3). ■

Следствие 4 *Пусть $f(x),\ xf(x), \ldots, x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ имеет производные до порядка p включительно, причем*

$$g^{(k)}(\lambda) = F\left[(-ix)^k f(x)\right](\lambda),\ k = 0, 1, \ldots, p.$$

Следствие 5 *Если $x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, тогда $F[f] \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Справедливо также "двойственное" утверждение.

Следствие 6 *Если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, и $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $|\lambda|^k F[f] \in L_1(\mathbb{R})$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое число $C_k > 0$, что*

$$|F[f](\lambda)| \le \frac{C_k}{1 + |\lambda|^k},\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Лекция 17 (7 апреля 2017)

Продолжаем изучение преобразование Фурье комплекснозначных функций $u(x),\ x \in \mathbb{R}^1$. Мы определим преобразование Фурье функций из $L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

$$F\left[u\right](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(x)\ dx \tag{1}$$

Мы будем также использовать другое обозначение, которое широко применяется:

$$\widetilde{u}\left(\lambda\right) := F\left[u\right](\lambda).$$

§1 Преобразование Фурье в пространстве Шварца

Рассмотрим более узкий класс функций - пространство Шварца S. Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со своими производными быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$.

Определение 1 *Комплекснозначная функция $u(x) \in S \Leftrightarrow u(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ и для любых $k, n \in \mathbb{Z}_+\ \ \exists M_{k,n}$:*

$$\left|\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right| \leq \frac{M_{k,n}}{\left(1+|x|\right)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{2}$$

Примеры функций из пространства Шварца: $\exp\left(-x^2\right),\ P_m(x)\exp\left(Q_{2l}\right)(x)$, где $P_m(x)$ и $Q_{2l}(x)$ – это полиномы степени m и $2l$, причем старший коэффициент Q_{2l} отрицателен.

Утверждение 1 *Если $u \in S$, то $\frac{d^k u}{dx^k} \in S, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Если $P_m(x)$ – полином степени m, то $P_m(x)u(x) \in S$.*

Очевидно, следует из определения. Поскольку $\left|e^{-i\lambda x}\right| = 1$, то интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно на $\lambda \in \mathbb{R}$, и его можно дифференцировать по λ любое число раз:

$$\frac{d\widetilde{u}}{d\lambda} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ix)e^{-i\lambda x}\ dx, \quad \frac{d^k}{dx^k}\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ix)e^{-i\lambda x}\ dx.$$

Эти интегралы равномерно и абсолютно сходятся при $u \in S$.

Обозначим через D оператор однократного дифферецирования по x и по λ:

$$D_x u(x) = \frac{du}{dx}, \quad D_\lambda \widetilde{u}(\lambda) = \frac{d\widetilde{u}}{d\lambda}.$$

Пусть $P(z)$ - полином с комплексными коэффициентами, тогда $P(D)$ - это дифференциальный оператор, т.е.

$$\begin{gathered} P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + z_1 \cdot z + a_0, \text{ тогда} \\ P(D) = a_n \cdot D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + ... + z_1 \cdot D + a_0, \text{ т.е.} \\ P(D)u = a_n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n u + a_{n-1} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u + ... + z_1 \cdot \frac{d}{dx}u + a_0 \cdot u \end{gathered}$$

При каждом дифференцировании интеграла (1) по λ подынтегральная функция умножается на $(-ix)$. Поэтому для $P(D)$ получаем следующее равенство:

$$P\left(D_{\lambda}\right) \widetilde{u}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(-ix) u(x) e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{3}$$

Используя также обозначение F, получаем

$$P(D) F[u]=F[P(-ix) u], \quad P\left(D_{\lambda}\right) \widetilde{u}=\widetilde{P_x(-ix)} u. \tag{4}$$

Рассмотрим преобразование Фурье от $\frac{du}{dx}$:

$$F\left[\frac{du}{dx}\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dk} e^{-i\lambda x}\, dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\lambda) u(x) e^{-i\lambda x}\, dx=(i\lambda) F[u].$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и воспользовались убыванием функции $u(x)$ к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.
Следовательно:

$$F\left[P\left(D_x\right) u\right]=P(i\lambda) F[u], \widetilde{P(D)}\, u=P(i\lambda) \widetilde{u} \tag{5}$$

Теорема 1 *Преобразование Фурье переводит функции из класса S в себя.*

Доказательство. Заметим, что функции из класса S принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, поэтому

$$|\widetilde{u}(\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty}|u(x)|\, dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Из (3) следует, что $\widetilde{u} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}_{\lambda}^1\right)$.

Как мы установили, производная функции из класса Шварца также принадлежит этому классу. Значит, в левой части (5) стоит преобразование Фурье функции из S.

Рассмотрим полином $P(z)=\left(1+z^{4n}\right)$. Из формулы (5) следует, что

$$\left(1+\lambda^{4n}\right)|F[u](\lambda)| \leq\left|F\left[\left(1+D_x^{4n}\right) u\right](\lambda)\right| \leq M.$$

Поэтому, преобразование Фурье от функции $u \in S$ стремится к нулю быстрее любой степени λ.

Из формулы (4) следует, что производная преобразования Фурье является преобразованием Фурье от функции из S, т.е. тоже стремится к нулю быстрее любой степени λ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. ■

Найдем отображение, обратное к преобразованию Фурье в пространстве Шварца. Наряду с $F[f]$ рассмотрим следующее линейное отображение:

$$G[f](\lambda)=\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\lambda x} dx,$$

которое, как и преобразование Фурье, корректно определено на пространстве суммируемых функций (и, тем более, на пространстве Шварца). Легко видеть, что

$$G[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi}F[f](-\lambda),$$

Преобразование $G[f]$ обладает всеми теми же свойствами, что и преобразование Фурье. Кроме того, из формулы обращения для преобразования Фурье следует

Следующую теорему мы уже доказывали для более широкого чем S класса функций.

Теорема 2 *(Об обращении преобразования Фурье) Если $u \in S$, то $G \circ F[u] = u$, т.е. $G = F^{-1}$ на S. Подробнее, если $u(x) \in S$, $\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\lambda x}\, dx$, тогда*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(\lambda)e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, если $u \in S$, то функция u удовлетворяет условию Дини, причем интеграл справа в (6) сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}^1$. Поэтому применима формула обращения преобразования Фурье. ■

§2 Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$

Преобразование Фурье легко обобщается на функции нескольких переменных. Пусть $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функция, интегрируемая по всему n-мерному пространству $\mathbb{R}^n$. Её преобразованием Фурье называется функция

$$\widetilde{u}(\lambda) = \widetilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot e^{-i(\lambda,x)}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot e^{-i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)}\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Этот n-кратный интеграл, заведомо существующий, поскольку $u(x_1, ..., x_n)$ интегрируемая, можно записать в виде следующего повторного интеграла (здесь применяется теорема Фубини):

$$\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, ..., x_n)e^{-ix_1\lambda_1}\, dx_1 \right\} e^{-ix_2\lambda_2}\, dx_2 \dots \right\} e^{-ix_n\lambda_n}\, dx_n. \tag{7}$$

Иначе говоря, можно перейти от функции n-переменных к её преобразованию Фурье, последовательно выполняя преобразования по каждой из переменных в отдельности (в любом порядке). Обращая последовательно каждую из n операций в правой части (7), получим формулу:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) e^{ix_n\lambda_n} \, d\lambda_n \right\} e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}} \, d\lambda_{n-1} \dots \right\} e^{ix_1\lambda_1} \, d\lambda_1.$$

Которую можно переписать в виде:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) e^{x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \ldots + x_n\lambda_n} \, d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}(\lambda) e^{i(x,\lambda)} \, d\lambda. \tag{8}$$

Однако, функция $\widetilde{u}(\lambda)$ не обязана быть суммируемой по всему $\mathbb{R}^n$. Поэтому необходимо указать, в каком смысле понимается этот интеграл и условия на функцию $f(x_1, ..., x_n)$.

Теорема 3 *Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, интегрируема по $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет в точке x условию Дини: существует такое число $\delta > 0$, что функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{|z|}$ суммируема по z в шаре $|z| \le \delta$, т.е.*

$$\int\limits_{|z|} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} dz < \infty,$$

Тогда формула обращения (8) справедлива и её надо понимать в смысле:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\substack{N_1 \to \infty \\ N_2 \to \infty \\ \cdots \\ N_n \to \infty}} \int\limits_{-N_1}^{N_1} \int\limits_{-N_2}^{N_2} \dots \int\limits_{-N_n}^{N_n} \widetilde{u}(\lambda) e^{i(\lambda,x)} \, d\lambda_1 d\lambda_1 \dots d\lambda_n. \tag{9}$$

Для доказательства применяется теорема Фубини и теорема 1 из Лекции 15.

Аналогично пространству Шварца S в $\mathbb{R}^1$ вводится пространство Шварца в $\mathbb{R}^n$, которое обозначается $S(\mathbb{R}^n)$. Это пространство состоит из функций $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, у которых все их частные производные $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $(|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \ \alpha_i \in \mathbb{Z}_+)$ стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$:

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \le \frac{C_{\alpha,k}}{1 + |x|^k}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следствие 7 *Если $u \in S(\mathbb{R}^n)$, то $\widetilde{u} \in S(\mathbb{R}^n_\lambda)$, $\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i(x,\lambda)} \, dx$, при этом*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\lambda} \widetilde{u}(\lambda) e^{i(x,\lambda)} \, d\lambda,$$

и этот интеграл сходится абсолютно и равномерно в $\mathbb{R}^n_\lambda$.

Лекция 18 (11 апреля 2017)

Применение преобразования Фурье

Преобразование Фурье, как и ряд Фурье, помогает получать решения для многих уравнений с частными производными. Основой применения служит то обстоятельство, что оператор дифференцирования переходит после преобразования Фурье в более простой оператор умножения на независимую переменную.

§1 Решение уравнения теплопроводности на всей оси

Мы будем решать следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{2}$$

Ищем решение $u = u(x,t)$, гладкости C^2. Начнём с наводящих соображений. Найдем сперва частные решения методом разделения переменных. Ищем ограниченное решение в виде:

$$u(x,t) = T(t) \cdot X(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Подставляем в уравнение (1) и, разделяя переменные, находим уравнения:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2,$$

где μ^2 – некоторая константа. Как мы видели раньше, случай $+\mu^2$ не годится, т.к. приводит к неограниченным решениям уравнения для x. Получаем уравнения:

$$T'(t) + a^2\mu^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \mu^2 X(x) = 0.$$

Решаем первое уравнение: $T(t) = C \cdot e^{-a^2\mu^2 t}$. А решение второго уравнения запишем в виде:

$$X(x) = A(\mu) \cdot e^{i\mu x} \ \text{(годится любое вещественное число } \mu).$$

Получаем ограниченное частное решение (1) в виде:

$$u_\mu(x,t) = A(\mu) \cdot e^{-a^2\mu^2 t + i\mu x}.$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$. Мы можем складывать также решения с разными μ и $A(\mu)$. Более того, можно также интегрировать по параметру μ. При этом будут снова получаться решения уравнения (1):

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\mu) e^{-a^2\mu^2 t + i\mu x}\, d\mu.$$

Эти решения зависят только от функции $A(\mu)$. Какие $A(\mu)$ выбрать? Необходимо соблюдать начальное условие при $t = 0$, т.е.

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\mu) \cdot e^{i\mu x}\, d\mu.$$

Применяем преобразование Фурье:

$$A(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\mu x}\, dx \quad (\lambda = \mu)$$

Получим формально формулу для решения задачи (1), (2). Теперь сделаем это более строго и выпишем более простую формулу для решения.

Будем предполагать сначала, что $u(x,t) \in C^{\infty}$, и более того, при каждом t функция $u(x,t) \in S$ (пространство Шварца) равномерна по t на каждом отрезке $[0, T]$ (это означает, что константа $M_{k,n}$ в формуле оценки

$$\left| \frac{d^k u}{dx^k} \right| \le M_{k,n} \cdot (1 + |x|)^{-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

не зависит от $t \in [0, T]$ (но может зависеть от T)). Сделаем преобразование Фурье обеих частей уравнения (1). Получим следующие выражения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(x,t)\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{u}(\lambda, t)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\lambda x}\, dx = (i\lambda)^2 \cdot \widetilde{u}(\lambda, t) = -\lambda^2 \widetilde{u}(\lambda, t).$$

Получаем следующие ОДУ, в котором число λ служит фиксированным параметром:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(\lambda, t) = -\lambda^2 a^2 \widetilde{u}(\lambda, t).$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\widetilde{u}(\lambda, t) = \widetilde{u}(\lambda, 0) \cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Теперь воспользуемся формулой обращения преобразования Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, \widetilde{u}(\lambda, t)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t}\, \widetilde{u}(\lambda, 0)\, d\lambda.$$

Напомним, что

$$\widetilde{u}(\lambda,0)=\widetilde{\varphi}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\ \varphi(x)\ dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x-a^2\lambda^2t^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-i\lambda y}\ dy\right]\ d\lambda=$$

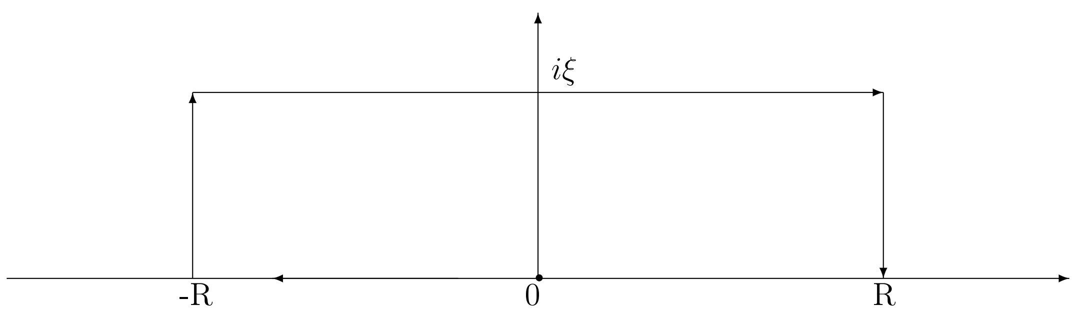
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-y)}\ d\lambda\ dy.$$

Замена порядка интегрирования законна, т.к. функция $\varphi\in S$, а пространство S состоит из быстро убывающих функций. Вычислим второй интеграл явно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-y)}\ dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t\left(\lambda-i\frac{x-y}{2a^2t}\right)^2-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\ d\lambda=e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2tz^2}\ dz=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$$

Мы делали замену $\lambda-i\frac{x-y}{2a^2t}=z$ и воспользовались теоремой из ТФКП, об интеграле по замкнутому контуру.



Здесь $\xi=\frac{x-y}{2a^2t}$. Подынтегральная функция голоморфна на плоскости, интегралы по отрезкам $z=[R,\ R+i\xi]$ и $[-R,\ -R+i\xi]$ стремятся к нулю при $R\to\infty$. Потом сделали замену $a\sqrt{t}z=s$ и воспользовались интегралом Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\ ds=\sqrt{\pi}$.

Мы получили формулу Пуассона для решения задачи (1)-(2):

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\varphi(y)\ dy,\qquad \text{где } G(x,y,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}. \tag{3}$$

Формула (3) получена при очень жестких условиях на функцию $\varphi(x)$ и решение $u(x,t)$, а именно принадлежность этих функций пространству Шварца. Однако, как легко видеть, эта формула имеет смысл для значительно более широкого класса функций φ. Это позволяет решить задачу Коши (1), (2) лишь при условии, что начальная функция непрерывна и ограничена.

§2 Теорема существования решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Напомним, что решением задачи Коши (1)-(2) называется функция $u(x,t)$, у которой $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \in C\,(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ и $u \in C\,(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$, причем $u(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 *Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная непрерывная функция при $x \in \mathbb{R}$. Тогда функция, определенная формулой (3), бесконечно дифференцируема по x и по t при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и начальному условию (2) при $t = 0$.*

Доказательство. Для любой точки $(x_0, t_0), x_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$, найдется её окрестность, где $t \geq \gamma > 0$ и $|x| < m$. Для точек (x,t) из этой окрестности интеграл (3) сходится абсолютно и равномерно. Более того, его можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз по x и t.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что функция $G(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Действительно:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^2t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{x-y}{2a^2t}G$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{2a^2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^4t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

Следовательно, функция (3) так же удовлетворяет этому уравнению. Отметим, что $G(x,y,t) > 0$ и выполнено тождество:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\;dy = 1 \quad \text{(Проверяется непосредственно заменой).} \tag{4}$$

Осталось проверить, что функция (3) удовлетворяет начальному условию (2). Покажем, что $u(x,t)$ непрерывна при $t = 0$ и $u(x,t) - \varphi(z) \to 0$ при $x \to z,\; t \to 0+$. Рассмотрим разность:

$$u(x,t) - \varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\varphi(y)\;dy - \varphi(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\;dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\left[\varphi(y) - \varphi(z)\right]\;dy.$$

Пусть $|\varphi(x)| \leq M$ (по условию). Оценим

$$|u(x,t) - \varphi(z)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\left[\varphi(y)-\varphi(z)\right]\;dy\right| \leq \left|\int\limits_{|y-z|<\delta} G(x,y,t)\left[\varphi(y)-\varphi(z)\right]\;dy\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_{|y-z|\geq\delta} G(x,y,t)\left[\varphi(y)-\varphi(z)\right]\;dy\right|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $|\varphi(y) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|y - z| < \delta$ (напомним, что функция φ непрерывна в точке z). Воспользуемся в первом слагаемом положительностью функции G и равенством (4). Тогда:

$$|u(x,t) - \varphi(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{|y-z|\geq\delta} 2M \cdot G(x,y,t)\ dy.$$

Оценим последний интеграл. Если $|x - z| < \frac{\delta}{2}$ и $|y - z| \geq \delta$, то $|y - x| \geq \frac{\delta}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_{|y-z|\geq\delta} 2M \cdot G(x,y,t)\ dy \leq 2M \int\limits_{|y-x|\geq\delta/2} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\ dy =$$

$$= \frac{2M}{a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4a^2t}\right)\ ds = M_1 \int\limits_{\frac{\delta}{4a\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2)\ d\sigma.$$

Мы сделали сначала замену переменной $x - y = s$, а в конце еще замену $\frac{s}{2a\sqrt{t}} = \sigma$. Последнее выражение с интегралом можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $t < \mu$, если выбрать число μ достаточно малым. Следовательно,

$$|u(x,t) - \varphi(z)| \leq \varepsilon \quad \text{если } |x - z| < \frac{\delta}{2} \text{ и } t < \mu.$$

Значит, функция $u(x,t)$ непрерывна в точке $(z,0)$ и $u(z,0) = \varphi(z)$.

$\blacksquare$

Лекция 19

§1. Решение уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$

На прошлой лекции мы построили решение для задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^1$ при помощи преобразования Фурье. Аналогично строится решение этой задачи в многомерном случае, когда $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа.

Применяя преобразование Фурье к обеим частям уравнения (1) получаем:

$$\frac{\partial \tilde{u}(\lambda,t)}{\partial t} = -(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) a^2 \tilde{u}(\lambda,t).$$

Откуда

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \tilde{u}(\lambda,0) \cdot e^{-|\lambda|^2 a^2 t},$$

где $\tilde{u}(\lambda,0) = \tilde{\varphi}(\lambda)$ – преобразование Фурье $\varphi(x)$. Применим n-мерную формулу обращения преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x\rangle} \tilde{u}(\lambda,t) d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x\rangle - a^2|\lambda|^2 t} \tilde{\varphi}(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x\rangle - a^2|\lambda|^2 t} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot e^{-i\langle\lambda,y\rangle} dy \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x-y\rangle - a^2|\lambda|^2 t} d\lambda \right] dy. \end{aligned}$$

По теореме Фубини можно менять порядок интегрирования, так как $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Получаем формулу:

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot G(x,y,t) dy, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} G(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x-y\rangle - a^2|\lambda|^2 t} d\lambda = &\quad [\text{переменные разделяются}] \\ = \prod_{k=1}^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k(x_k-y_k) - a^2\lambda_k^2 t} d\lambda_k = &\quad [\text{случай } n=1 \text{ из прошлой лекции}] \\ = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{|x_k-y_k|^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

Формула (2) называется формулой Пуассона в $\mathbb{R}^n$. Как и в одномерном случае, легко убедиться в том, что формула (2) задает решение задачи (1), если известно, что $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ и $|\varphi(x)| \leq M$: это проверяется непосредственно дифференцированием, а начальные условия – как в одномерном случае.

§2. Решение уравнения колебаний бесконечной струны с помощью преобразования Фурье

Теперь построим решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Предположим, что $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^1)$ и $u(x,t) \in S(\mathbb{R}^1)$ равномерно по $t \in [0,T]$, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$. Выполним преобразование Фурье обеих частей уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda,t)}{\partial t^2} = -a^2\lambda^2\tilde{u}(\lambda,t), \tag{3}$$

где

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\langle x,\lambda\rangle}dx.$$

Решения (3) запишем в виде:

$$\tilde{u}(\lambda,t) = A(\lambda)\cos a\lambda t + B(\lambda)\sin a\lambda t. \tag{4}$$

Начальные условия:

$$\tilde{u}(\lambda,0) = \tilde{\varphi}(\lambda),\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda,0) = \tilde{\psi}(\lambda).$$

Значит,

$$A(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda),\ B(\lambda) = \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda}.$$

Покажем, что $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$. Для этого установим следующее утверждение:

Утверждение 1 *Пусть $z(\lambda)$ – некая функция. Тогда*

$$\frac{z(\lambda)}{\lambda} \in S(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} z(\lambda) \in S(\mathbb{R}), \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если функция $z(\lambda)$ является аналитической в точке $\lambda = 0$, то это очевидно. Слушателям предлагается убедиться в том, что это так и в случае, когда функция $z(\lambda)$ не является аналитической (такие функции имеются в пространстве S и их, в некотором смысле, подавляющее большинство). ■

Ввиду наложенных на ψ ограничений, функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет условиям этого утверждения. Действительно,

$$\tilde{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0,$$

поэтому $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$.

Подставим в (4) $t = 0$. Получим:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\psi}(\lambda)\cos a\lambda t + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda}\sin a\lambda t.$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Подставив в выражение для $\tilde{u}$, получаем:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = F(\lambda)e^{ia\lambda t} + G(\lambda)e^{-ia\lambda t}, \tag{5}$$

где

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i},\ G(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} - \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i}.$$

Заметим, что $F, G \in S(\mathbb{R})$ (как линейные комбинации функций A и B из $S(\mathbb{R})$). Тогда F и G – преобразования Фурье некоторых функций $f \in S(\mathbb{R})$ и $g \in S(\mathbb{R})$, причем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{f}(\lambda)e^{ia\lambda t} + \tilde{g}(\lambda)e^{-ia\lambda t}.$$

Покажем, что в правой части этого равенства стоит преобразование Фурье функции $f(x + at) + g(x - at)$. Действительно, для любого $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{f(x+\tau)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)e^{-i\lambda x}dx = e^{i\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)e^{-i\lambda(x+\tau)}dx =$$

$$= e^{i\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\lambda y}dy = e^{i\lambda\tau}\tilde{f}(\lambda).$$

Следовательно,

$$\widetilde{f(x+at)} = e^{i\lambda at}\tilde{f}(\lambda),\ \widetilde{g(x-at)} = e^{-i\lambda at}\tilde{g}(\lambda).$$

Поэтому,

$$\tilde{u}(x, t) = \widetilde{f(x+at) + g(x-at)}.$$

Значит,

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at). \tag{6}$$

Найдем выражения функций f и g через начальные функции φ и ψ. Воспользуемся начальными условиями при $t = 0$:

$$f(x) + g(x) = \varphi(x),$$

$$f'(x) + g'(x) = \frac{\psi(x)}{a}.$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$f(x) - g(x) = C + \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy.$$

С учетом первого равенства получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) + C + \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy\Big),$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) - C - \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy\Big).$$

Мы нашли f и g. Они определены с точностью до прибавления константы. Найдем вид решения:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\cdot\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy. \tag{7}$$

Эта формула называется формулой Даламбера. Впервые ее вывел Эйлер, но без использования преобразования Фурье, которое появилось позже. А Даламбер, на самом деле, нашел формулу (6) для любого решения уравнения (1). Точнее, им была доказана следующая

Теорема 2 (Даламбер) *Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{R}^2$ и функция $u(x,t) \in C^2(D)$, $(x,t) \in D$, является решением уравнения (1) в области D. Тогда найдутся такие две функции $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, что $u(x,t) = f(x+at) + f(x-at)$.*

Доказательство. Сделаем замену переменных $\xi = x + at, \eta = x - at$ и рассмотрим функцию $v(\xi,\eta)$, которая получается из $u(x,t)$ после этой замены, т.е.

$$u(x,t) = v(x+at, x-at).$$

Очевидно, что $v(\xi,\eta) \in C^2(G)$, где (выпуклая) область G получается из D при сделанной замене координат. Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $v(\xi,\eta)$ в области G. Имеем

$$\begin{aligned}
&u_x = v_\xi + v_\eta, \qquad u_{xx} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi\eta},\\
&u_t = av_\xi - av_\eta, \quad u_{tt} = a^2v_{\xi\xi} + a^2v_{\eta\eta} - 2a^2v_{\xi\eta},\\
&u_{tt} - a^2u_{xx} = -4a^2v_{\xi\eta}.
\end{aligned}$$

Следовательно, получаем уравнение для функции $v(\xi, \eta)$

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad \forall(\xi, \eta) \in G.$$

Интегрируем это уравнение два раза, используя выпуклость области G:

$$v_\xi = f_1(\xi) \quad \Rightarrow \quad v(\xi, \eta) = \int_0^\xi f_1(s)ds + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Откуда получаем, что $u(x, t) = f(x + at) + f(x - at)$.

■

Мы вывели формулу (7) для решения задачи Коши (1), (2) при довольно жестких ограничениях на φ и ψ. Однако, как несложно видеть, выполнена следующая теорема.

Теорема 3 (формула Даламбера) *Пусть* $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. *Тогда формула* (7) *задает функцию* $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, *которая является решением задачи Коши* (1), (2).

Доказательство. Достаточно продифференцировать формулу (6) или (7) (напомним, что $f, g \in C^2(\mathbb{R})$):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(f(x + at) + g(x - at)\big) = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(f(x + at) + g(x - at)\big) = f''(x + at) + g''(x - at).$$

Начальные условия проверяются непосредственно:

$$u(x, 0) = \frac{\varphi(x) + \varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int\limits_x^x \psi(y)dy = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = \frac{a\varphi(x) - a\varphi(x)}{2} + \frac{a}{2a}\big(\psi(x) + \psi(x)\big) = \psi(x).$$

■

Формула Даламбера говорит о том, что решение уравнения струны есть сумма двух бегущих волн. Волна $f(x + at)$ бежит влево со скоростью a, а волна $g(x - at)$ бежит вправо со скоростью a.

Лекция 20

§1. Уравнения с частными производными, корректные по Петровскому

Продолжим применение преобразования Фурье. Будем решать уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем обобщать методы, которые использовались при решении уравнения теплопроводности. Обозначим оператор $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Пусть $P(z) = P(z_1, \ldots, z_n)$ – многочлен относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$, то есть

$$P(z) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|\leq m}} a_\alpha \cdot z^\alpha, \quad \text{где } a_\alpha \in \mathbb{C},\ z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $P(D)$, где $D = (D_1, \ldots, D_n)$:

$$P(D) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|\leq m}} a_\alpha \cdot D^\alpha, \quad P(D)u = \sum_\alpha a_\alpha \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}.$$

Многочлен $P(z)$ принято называть символом дифференциального оператора $P(D)$. Число m называется порядком оператора $P(D)$.

Пример $P(z) = z_1^2 + 5iz_2z_3 + \frac{2}{7}z_4$, $n = 4$, $m = 2$. *Тогда*

$$P(D) = D_1^2 + 5iD_2D_3 + \frac{2}{7}D_4 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 5i\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{2}{7}\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Этот оператор имеет порядок $m = 2$.

Уравнение теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ можно записать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u, \quad \text{где } P(D) = a^2\sum_{k=1}^n D_k^2.$$

Рассмотрим теперь задачу Коши для общего уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $P(D)$ – некоторый дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка m.

Определение 1 *Уравнение* (1) *называется корректным по Петровскому, если существует константа* $M \in \mathbb{R}$ *такая, что для любого вещественного* $\lambda \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re} P(i\lambda) \leq M. \tag{3}$$

Пусть $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ – функция из пространства Шварца в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что в этом случае для корректных по Петровскому уравнений решения можно построить с помощью преобразования Фурье.

Положим

$$\tilde{u}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle x, \lambda\rangle} dx, \ u \in S.$$

По формуле обращения:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(\lambda) e^{i\langle x, \lambda\rangle} d\lambda.$$

Как мы знаем, преобразование Фурье производных получается по формуле:

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) e^{-i\langle x, \lambda\rangle} dx = (i\lambda_j) \cdot \tilde{u}(\lambda),$$

$$\widetilde{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}}(\lambda) = (i\lambda_j)(i\lambda_k) \cdot \tilde{u}(\lambda),$$

$$\widetilde{P(D)u}(\lambda) = P(i\lambda) \cdot \tilde{u}(\lambda).$$

Умножим обе части уравнения (1) на $e^{-i\langle x, \lambda\rangle}$ и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^n$. Получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda, t) = P(i\lambda) u(\lambda, t), \ \lambda \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0. \tag{4}$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{R}^n$ – произвольный параметр. Поскольку $\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda)$, то решение этого уравнения имеет вид:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t},$$

и, следовательно, применяя формулу обращения, получаем формулу для решения задачи Коши (1), (2):

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t + i\langle x, \lambda\rangle} d\lambda \quad \text{при } t \geq 0. \tag{5}$$

Заметим, что в силу <u>условия Петровского</u> (3) выполнено

$$\left| e^{P(i\lambda)t + i\langle x, \lambda\rangle} \right| = e^{\operatorname{Re} P(i\lambda) t} \leq e^{Mt} \ \forall t \geq 0.$$

Поэтому интеграл (5) сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, так как $\tilde{\varphi} \in S$. Более того, этот интеграл можно сколько угодно раз дифференцировать по x и по t и, в частности,

$$P(D)u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(i\lambda) \tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t + i\langle x, \lambda\rangle} d\lambda,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(i\lambda)\tilde{\varphi}(\lambda) e^{P(i\lambda)t + i\langle x,\lambda\rangle} d\lambda.$$

Значит,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

и, очевидно, $u(x,0) = \varphi(x)$, так как $\varphi \in S$. Значит, формула (5) задает решение задачи (1), (2) при $\varphi \in S$.

Рассмотрим некоторые примеры:

Пример 1 (Уравнение теплопроводности) *Для уравнения теплопроводности*

$$P(D) = a^2(D_1^2 + \dots + D_n^2),$$
$$P(i\lambda) = -a^2(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) = -a^2 \cdot |\lambda|^2.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} P(i\lambda) \leq 0$, *то есть условие Петровского выполнено при* $M = 0$. *Мы уже решали это уравнение и получили формулу Пуассона.*

Пример 2 (Уравнение Шредингера)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ia^2 \triangle u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0. \tag{6}$$

Это основное уравнение в квантовой механике.

$$P(i\lambda) = ia^2\Big((i\lambda_1)^2 + \dots + (i\lambda_n)^2\Big) = -ia^2 |\lambda|^2 \Rightarrow \operatorname{Re} P(i\lambda) = 0 \leq 0.$$

Значит, уравнение Шредингера является корректным по Петровскому.

Найдем формулу для решение уравнения Шредингера при $n = 1$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda x - ia^2\lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - ia^2\lambda^2 t} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda y} \varphi(y) dy \right] d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-y) - ia^2\lambda^2 t} d\lambda dy$$

Внутренний интеграл сосчитаем явно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(a^2\lambda^2 t - \lambda(x-y))} d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ia^2 t\left(\lambda - \frac{x-y}{2a^2t}\right) + i\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} d\lambda \qquad \left[\text{замена } \lambda - \frac{x-y}{2a^2t} = z\right]$$
$$= e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ia^2tz^2} dz = \qquad \left[\text{замена } a\sqrt{t}z = \xi;\ dz = \frac{d\xi}{a\sqrt{t}}\right]$$
$$= e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} \frac{1}{a\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi} d\xi = \qquad \left[\text{интеграл Френеля: } \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi} d\xi = \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}.$$

Получили формулу для решения уравнения Шредингера (6) при $n = 1$:

$$u(x,t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{i\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy.$$

Тогда при $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справедлива формулу

$$u(x,t) = \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{i\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy.$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что при $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ эта формула действительно задает решение уравнения Шредингера (6) с начальным условием $\varphi(x)$.

Пример 3 (Обратное уравнение теплопроводности)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \triangle u,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t \geq 0.$$

$$P(D) = -a^2 D,\ \ P(i\lambda) = a^2 \left|\lambda\right|^2.$$

Условие (3) *<u>не выполнено</u>. Это уравнение не является корректным по Петровскому.*

Лекция 21 (25 апреля 2017)

§1. Свертка функций и преобразование Фурье

Пусть $f_1(x),\ f_2(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi$$

называется свёрткой функций f_1 и f_2.

Функция $f(x)$ определена при почти всех x и принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Действительно, двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi dx$$

существует, поскольку существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\xi)| \cdot |f_2(\eta)| d\xi d\eta \text{ (теорема Фубини).}$$

Следовательно, существует и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi.$$

Функция f обозначается $f_1 * f_2$.

Вычислим преобразование Фурье свертки двух функций из $L_1(\mathbb{R})$. Применяя теорему Фубини и делая замену $x - \xi = \eta$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi\right] e^{-i\lambda x} dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx\right] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\eta x} e^{-i\xi x} d\eta\right] d\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\eta x} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\xi x} d\xi = F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Следовательно, $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$. В других принятых обозначениях $\widetilde{f_1 * f_2} = \widetilde{f}_1 \cdot \widetilde{f}_2$.

Легко проверяется следующее

Утверждение 1 *Если $f_1, f_2 \in S$, то $f_1 * f_2 \in S$.*

В качестве применения полученных соотношений еще раз выведем формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$.

$$u_t = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Пусть $u(\cdot, t) \in S,\ \varphi \in S$. Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения (1) и получим

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(\lambda,t) = -a^2\lambda^2 \tilde{u}(\lambda,t),\ \tilde{u}(\lambda,0) = \tilde{\varphi}(\lambda),$$
$$\tilde{u}(\lambda,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\tilde{\varphi}(\lambda).$$

В лекции 16 мы нашли преобразование Фурье функции e^{-rx^2} :

$$F\left[e^{-rx^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{r}}e^{-\frac{\lambda^2}{4r}}.$$

Положим $r = (4a^2t)^{-1}$ и получим

$$F[G] = F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right] = e^{-a^2\lambda^2 t},$$

где $G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$. Следовательно,

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \tilde{G}(\lambda,t)\cdot\tilde{\varphi}(\lambda) = \widetilde{G(\cdot,t)*\varphi(\cdot)},$$

т.е.

$$u(x,t) = G(\cdot,t)*\varphi(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x-\xi)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Получили формулу Пуассона.

§2. Преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$

Известно, что преобразование Фурье функции из $L_1(\mathbb{R})$ не обязательно принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Вместе с тем, как было установлено, преобразование Фурье отображает пространство Шварца S в себя. Аналогичным свойством обладает пространство $L_2(\mathbb{R})$, однако здесь нужно немного иначе определить преобразование Фурье.

Напомним некоторые результаты из теории рядов Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$, где имеется полная ортогональная система $\{e^{inx}\}, n = 0,\pm1,\pm2,\dots$ Каждой функции $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ поставим в соответствие последовательность ее коэффициентов Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx,\ n = 0,\pm1,\pm2,\dots$$

Если функция $f(x)\in L_2(-\pi,\pi)$, то совокупность ее коэффициентов Фурье определяет отображение евклидова пространства $L_2(-\pi,\pi)$ в евклидово пространство ℓ_2, причем это отображение линейно и сохраняет скалярное произведение и норму (равенство Парсеваля):

$$2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx.$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье F для функций, заданной на всей оси. Вопрос: можно ли F трактовать как отображение в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Основная трудность состоит в том, что функции из $L_2(\mathbb{R})$ не обязаны принадлежать $L_1(\mathbb{R})$, т.е. мы не можем воспользоваться введенным ранее определением преобразования Фурье в $L_1(\mathbb{R})$. Однако, это можно сделать несколько иначе. При этом поможет следующая

Теорема 1 (順Планшерель) *Для всякой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ при любом $N \in \mathbb{N}$ интеграл*

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

представляет собой функцию от λ, принадлежащую $L_2(\mathbb{R})$. При $N \to \infty$, функции $g_N(\lambda)$ сходятся к некоторому пределу $g \in L_2(\mathbb{R})$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{2}$$

Функция $g(\lambda)$ называется преобразованием Фурье функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Если $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то построенная выше функция $g(\lambda)$ совпадает с обычным преобразованием Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, что равенство (1) устанавливается сперва для функций из класса Шварца S, который всюду плотен в $L_2(\mathbb{R})$, а потом распространяется по непрерывности на все пространство $L_2(\mathbb{R})$.

1. Пусть $f_1, f_2 \in S$. Обозначим g_1 и g_2 их (обычные) преобразования Фурье. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\right]\overline{f_2(x)}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-i\lambda x}dx}\right]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda,$$

причем изменение порядка интегрирования законно по теореме Фубини, поскольку функция $g_1(\lambda)\overline{f_2(x)}e^{-i\lambda x}$ абсолютно интегрируема на плоскости (λ, x). Положим $f_1 = f_2 = f$, $g_1 = g_2 = g$ и получим (1) для любой функции $f \in S$.

2. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$ и обладает тем свойством, что она равна нулю вне некоторого конечного интервала $(-a, a)$. Такие функции называются финитными. Тогда, f интегрируема на интервале $(-a, a)$, т.е. $f \in L_2(-a, a)$, следовательно, $f \in L_1(\mathbb{R})$, и поэтому определено обычное преобразование Фурье

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-a}^{a} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

Пусть теперь $\{f_n\}$ – последовательность функций из S, обращающихся в ноль вне $(-a, a)$ и сходящаяся по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ к f. Такую последовательность можно построить для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ (конструкцию мы опускаем). Поскольку f и f_n отличаются от нуля лишь на конечном интервале, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f и по норме пространства $L_1(\mathbb{R})$. Поэтому последовательность $\{g_n(\lambda)\}$ сходится к $g(\lambda)$ равномерно на всей оси (см. утверждение 2, лекция 16). Кроме того, $\{g_n(\lambda)\}$ фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$. Действительно, $g_n - g_m \in S$, поэтому в силу уже доказанного

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx,$$

т.е. $\{g_n(\lambda)\}$ фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$. Значит, эта последовательность сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к той же самой функции $g(\lambda)$, к которой сходится равномерно. Поэтому в равенстве

$$\|f_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|g_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Таким образом, получаем, что равенство (1) справедливо для любой финитной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. При этом, очевидно, что $g(\lambda) \in L_2(\mathbb{R})$.

3. Пусть, наконец, f – произвольная функция из $L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |x| \le N, \\ 0, & \text{при } |x| > N. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\|f - f_N\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0 \ (N \to \infty).$$

Функция $f_N(x)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Поэтому для нее существует преобразование Фурье (обычное). Оно равно

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

Заметим, что функция $f_N - f_M$ является финитной, поэтому в силу пункта **2**, который мы уже доказали,

$$\|f_N - f_M\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|g_N - g_M\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Значит, последовательность $\{g_N(\lambda)\}$ является фундаментальной в $L_2(\mathbb{R})$, т.е. она сходится к некоторому пределу, который мы обозначим через $g(\lambda)$. Тогда в равенстве

$$\|f_N\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|g_N\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

можно перейти к пределу при $N \to \infty$, откуда получаем равенство (1) для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. Первая часть теоремы Планшереля доказана.

Если теперь $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то для этой функции существует обычное преобразование Фурье

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

При этом функции f_N сходятся к f в норме $L_1(\mathbb{R})$, а значит, их преобразования Фурье $g_N(\lambda)$ сходятся равномерно к $\hat{g}(\lambda)$. Но кроме того, мы установили, что последовательность $g_N(\lambda)$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к некоторому пределу g. Отсюда следует, что $\hat{g} = g$.

$\blacksquare$

Следствие 8 *Для любых функций $f_1, f_2 \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}d\lambda.$$

Значит отображение $f \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F[f]$ сохраняет скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$.