

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2017
ЛИСТОК 5

срок сдачи 22.05.2017

1. Можно ли конформно перевести прямоугольник в квадрат так чтобы все вершины перешли в вершины?

2. Существует ли конформная биекция f единичного диска D , такая, что $f(0) = 1/2$ и $f(1/2) = 7/8$?

Пусть f функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на внутренность n -угольника с вершинами $b_1 = f(a_1), \dots, b_n = f(a_n)$ и внутренними углами $\pi\alpha_1, \dots, \pi\alpha_n$, $\alpha_i \in (0, 2]$.

3. Покажите что функция $g(z) = f''(z)/f'(z)$ аналитически продолжается до регулярной функции на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

4. Покажите, что $g(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$.

5. Постройте конформное отображение f верхней полуплоскости на равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами $0 = f(0), \xi = f(1), \xi + i\xi = f(\infty)$.

Для вещественного параметра $k \in (0, 1)$ определим функцию

$$u_k(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

и константы $K = u_k(1)$ и $K' = u_{\sqrt{1-k^2}}(1)$.

6. Покажите что $\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = K'$.

7. Найдите образ верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ при отображении $u_k(z)$.

8. Покажите, что обратная функция $z(u_k)$ дwoякопериодическая, найдите её периоды, дифференциальное уравнение и начальные условия, которым она удовлетворяет.