Лекция 26.04.17

Двойственность. Пусть $(\mathbf{g}, \theta)$ - ортогональная симметрическая алгебра Ли. Как обычно, положим $\mathbf{k} = \{x \in \mathbf{g} | \theta(x) = x\}$, $\mathbf{p} = \{x \in \mathbf{g} | \theta(x) = -x\}$. Тогда вещественное подпространство $\mathbf{g}^* = \mathbf{k} + i\mathbf{p} \subset \mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ комплексификации $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ алгебры Ли $\mathbf{g}$ замкнуто относительно скобки Ли, а отображение

$$\theta^* : \theta^*(x + iy) = x - iy, \qquad x \in \mathbf{k},\ y \in \mathbf{p}$$

является инволютивным автоморфизмом $\mathbf{g}^*$ (который можно продолжить по комплексной линейности до инволютивного автоморфизма $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ и это продолжение совпадет с аналогичным продолжением θ). При этом неподвижные точки θ по-прежнему совпадают с компактно вложенной подалгебры $\mathbf{k}$, а разложение Картана выглядит как

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{k} \oplus i\mathbf{p}.$$

Таким образом, пара $(\mathbf{g}^*, \theta^*)$ - ортогональная симетрическая алгебра Ли, которая называется двойственной к $(\mathbf{g}, \theta)$. Нетрудно увидеть, что форма Киллинга на $\mathbf{g}^*$ остается неизменной при ограничении на $\mathbf{k}$ и меняет знак на $i\mathbf{p}$. Таким образом, двойственная к симметрической алгебре Ли компактного типа является симметрической алгеброй Ли некомпактного типа и наоборот. Соответственно, симметрическое пространство X^* называется двойственным к X, если соответствующая симметрическая алгебра Ли $(\mathbf{g}^*, \theta^*)$ двойственна к $(\mathbf{g}, \theta)$.

Примеры **1**. Рассмотрим симметрическое пространство X положительно определенных матриц, $X = GL(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R})$. Соответствующая симметрическая алгебра Ли имеет вид

$$(\mathbf{g}, \theta) = (gl(n, \mathbb{R}), \theta(g) = -g^t),$$

так что разложение Картана $\mathbf{g} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$ состоит в разложении вещественной матрицы в сумму кососимметрической и симметрической. Тем самым алгебра Ли $\mathbf{g}^* = \mathbf{k} + i\mathbf{p} \subset gl(n, \mathbb{C})$ состоит из косоэрмитовых матриц. Соответствующее (компактное) симметрическое пространство есть фактор $U(n)/O(n)$ унитарной группы по ортогональной и описывает пространство вещественных структур в $\mathbb{C}^n$.

2. Пусть U - компактная полупростая группа, $\mathbf{u}$ - ее алгебра Ли. Тогда U - симметрическое пространство, реализованное как фактор $U \times U/U$. Соответствующая ортогональная симммметрическая алгебра Ла представлена парой $(\mathbf{g} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{u}, P_{12})$, где P_{12} - перестановка слагаемых в прямой сумме, так что подалгебра $\mathbf{k}$ в разложении Картана $\mathbf{g} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$ состоит из элементов $x^{(1)} + x^{(2)}$, где $x \in \mathbf{u}$, а подпространство $\mathbf{p}$ - из элементов вида $x^{(1)} - x^{(2)}$, $x \in \mathbf{u}$. Алгебра Ли $\mathbf{u}$ порождена образующими a_α, b_α,

$$a_\alpha = e_\alpha - e_{-\alpha}, \qquad b_\alpha = i(e_\alpha + e_{-\alpha})$$

занумерованными корнями полупростой алгебры $\mathbf{u}_{\mathbb{C}}$ (комплексификации $\mathbf{u}$), и элементами $i\mathbf{h}$, где h - вещественный элемент картановской подалгебры $\mathbf{h}$. Таким образом подалгебры $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$ порождены соответственно элементами

$$a_\alpha^{(1)} + a_\alpha^{(2)}, \quad b_\alpha^{(1)} + b_\alpha^{(2)}, \quad i(h^{(1)} + h^{(2)}) \quad \text{и} \qquad a_\alpha^{(1)} - a_\alpha^{(2)}, \quad b_\alpha^{(1)} - b_\alpha^{(2)}, \quad i(h^{(1)} - h^{(2)})$$

Тогда алгебра Ли $\mathbf{g}^* = \mathbf{k} + i\mathbf{p}$ порождена элементами

$$a_\alpha^{(1)} + a_\alpha^{(2)}, \quad b_\alpha^{(1)} + b_\alpha^{(2)}, \quad i(h^{(1)} + h^{(2)}) \quad \text{и} \qquad i(a_\alpha^{(1)} - a_\alpha^{(2)}), \quad i(b_\alpha^{(1)} - b_\alpha^{(2)}), \quad h^{(1)} - h^{(2)}$$

Линейные комбинации $(a_\alpha^{(1)} + a_\alpha^{(2)}) + i(b_\alpha^{(1)} - b_\alpha^{(2)})$ и $(b_\alpha^{(1)} + b_\alpha^{(2)}) + i(a_\alpha^{(1)} - a_\alpha^{(2)})$ образуют другой базис

$$\tilde{e}_\alpha = e_\alpha^{(1)} - e_{-\alpha}^{(2)}, \qquad \tilde{h} = h^{(1)} - h^{(2)}, \qquad \tilde{ie}_\alpha = i(e_\alpha^{(1)} + e_{-\alpha}^{(2)}), \qquad \tilde{ih} = i(h^{(1)} + h^{(2)})$$

в $\mathbf{g}^*$, а отображение

$$\varphi(\tilde{e}_\alpha) = e_\alpha, \qquad \varphi(\tilde{h}) = h, \qquad \varphi(\tilde{ie}_\alpha) = ie_\alpha, \qquad \varphi(\tilde{ih}) = ih,$$

устанавливает изоморфизм $\mathbf{g}^*$ с $\mathbf{u}_\mathbb{C}$, переводящий инволюцию P_{12} в инволюцию, выделяющую из $\mathbf{u}_\mathbb{C}$ ее компактную форму $\mathbf{u}$: $\theta(g) = -\bar{g}^t$. Таким образом, двойственная симметрическая алгебра Ли изоморфна паре $(\mathbf{u}_\mathbb{C}, \theta)$, а двойственное некомпактное симметрическое пространство - это фактор комплексной грппы Ли $U_\mathbb{C}$ по ее максимальной компактной подгруппе U.

Двойственность Картана для симметрических алгебр Ли можно реализовать по другому. Напомним, что ключевая теорема в классификации полупростых вещественных алгебр Ли состояла в том, что антилинейные инволюции τ и σ комплексной полупростой алгебры Ли $\mathbf{g}_\mathbb{C}$, выделяющие компактную форму $\mathbf{u}$ и заданную вещественную форму $\mathbf{g}$ соответственно, можно выбрать коммутирующими. При этом в качестве симметрической алгебры Ли получается пара $(\mathbf{g}, \theta = \sigma\tau)$. Теперь при тех же данных поменяем роли инволюций τ и σ, а именно, в качестве двойственной компактной симметрической алгебры Ли рассмотрим пару $(\mathbf{g}^* = \mathbf{u}, \theta)$.

Пример **3**. Рассмотрим вещественную алгебру Ли $u(p,q)$, $p < q$. Ее комплексификация изоморфна $gl(n,\mathbb{C})$, из которой она выделяется инволюцией σ,

$$\sigma(g) = -I_{p,q}\bar{g}^t I_{p,q}^{-1}$$

где $I_{p,q}$ - диагональная матрица $I_{p,q} = -e_{11} - ... - e_{pp} + e_{p+1,p+1} + ...e_{p+q,p+q}$. "Компактная"инволюция τ стандартная, $\tau(g) = -\bar{g}^t$, так что инволюция Картана $\theta = \sigma\tau$ имеет вид $\theta(g) = I_{p,q} g I_{p,q}^{-1}$. Замена местами τ и σ приводит к симметрической алгебре

$$(\mathbf{g}^* = u(p+q,), \quad \theta(g) = I_{p,q} g I_{p,q}^{-1}).$$

Таким образом, двойственное к симметрическому пространству $U(p,q)/(U(p) \times U(q))$ (допускающему реализацию в виде поверхности $|x_1|^2 + ...|x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - ... - |x_{p+q}|^2 = 1$ с метрикой, индуцированной метрикой Минковского объемлющего пространства), есть компактное симметрическое пространство $U(p+q)/(U(p) \times U(q))$, т.е., грассманиан p-мерных подпространств в $\mathbb{C}^{p+q}$.

Полярное разложение. Радиальные и угловые координаты. В вещественном случае полярное разложение означает представление квадратной вещественной матрицы в виде произведения ортогональной и симметрической положительно определенной, в комплексном в виде произведения унитарной и эрмитовой положительно определенной. Напомним доказательство для невырожденной комплексной матрицы g. Пусть $t = \bar{g}^t g$. Оператор t - эрмитов положительно определен, и существует ортонормированный базис $e_1, ..., e_n$, так что $te_i = \lambda_i e_i$, где $\lambda_i > 0$, откуда

$$(te_i, e_j) = \lambda_i \delta_{i,j} = (\bar{g}^t g e_i, e_j) = (ge_i, ge_j)$$

Значит, векторы $g(e_i)$ ортогональны. Обозначим $f_i = \frac{g(e_i)}{\sqrt{\lambda_i}}$. Это ортонормированный базис. Пусть $u(e_i) = f_i$. Тогда u унитарна. Положим $s = gu^{-1}$. Имеем: $s(f_i) = gu^{-1}(f_i) = g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} f_i$. Значит, s - положительно определенная эрмитова и $g = su$.

Всякая эрмитова положительно определенная матрица s сопряжена диагональной при помощи унитарной, $s = u_1 \Lambda u_1^{-1}$, $\Lambda = \sum \lambda_i e_i i$, $\lambda_i > 0$. Значит, $g = u_1 \Lambda u_2$, где $u_2 = u_1^{-1} u$. Таким образом, для $G = GL(n, \mathbb{C})$ или $G = GL(n, \mathbb{R})$ мы получили разложение

$$G = KAK,$$

где K - максимальная компактная подгруппа ($U(n)$ или $O(n)$ соответственно), подгруппа A в обоих случаях состоит из диагональных матриц с положительными матричными элементами. Это разложение имеет место и для произвольной полупростой вещественой группы Ли, где K имеет тот же смысл, а $A = \exp \mathbf{a}$, где $\mathbf{a} \subset \mathbf{p}$ - "векторная"подалгебра Картана, определяемая как максимальная коммутативная подалгебра в $\mathbf{p}$.

Для некомпактного симметрического пространства $X = G/K$ это разложение означает представление X в виде локального произведения

$$X = AK \tag{1}$$

которые дают систему разделенных координат в X. Некомпактные координаты вдоль A называются радиальными, компактные вдоль K - угловыми. Размерность A называется рангом симметрического пространства. Из конструкции видно, что ранг имеет вполне геометрический смысл. Для некомпактного симметрического пространства это "число некомпактных"измерений.

Разложение (1) имеет смысл и для компактных симметрических пространств с тем же определением A. В роли K, как и ранее, выступает стабилизатор точки в группе изометрий. Ранг симметрического пространства геометрически можно интерпретировать как максимальную размерность плоского подпространства.

Хорошей иллюстрацией понятий радиальных и угловых координат дает разбор маломерных симметрических пространств - двумерной сферы и плоскости Лобачевского в реализациях полуплоскости и внутренности круга - см. задачи семинара.

Литература

1. С.Хелгасон, Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства, гл. IV–V
2. С.Хелгасон, Группы Ли и геометрический анализ, Введение