Листок 4. .

Мартингалы. Стохастический интеграл. Формула Ито. Стохастические ДУ.

(1) Докажите, что мартингал ξ_t, $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$ — процесс с некоррелированными приращениями.

(2) Пусть $\{\xi_k\}$ — независимые с.в. со средним 1. Докажите, что $X_n = \prod_{k=1}^n \xi_k$ — мартингал.

(3) Пусть ξ_n — последовательность независимых с.в. Предположим, что существует $t > 0$ со свойством $\mathbb{E}e^{t\xi_n} = 1$. Докажите, что $P(\sup_{k\in\mathbb{N}} S_k \geq x) \leq e^{-tx}$, где $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$.

(4) Коробка содержит красный и синий шары. Шар выбирается случайным образом и возвращается в коробку вместе с еще одним шаром того же цвета. Пусть R_n — число красных шаров в коробке после повторения процедуры n раз. Докажите, что $R_n/(n+2)$ — мартингал. Пусть N — число шаров, вытянутых до первого синего. Найти $\mathbb{E}(N+2)^{-1}$.

(5) * **Неравенство Дуба.** Пусть X_n — дискретный неотрицательный субмартингал, $n \in \{0, 1, \cdots, N\}$. Докажите, что

$$\mathbb{E}\big(\max_{0\leq n\leq N} X_n^2\big) \leq 4\mathbb{E}X_N^2.$$

Указание: для числовой неотрицательной последовательности x_n докажите неравенство

$$\overline{x}_N^2 + 4\sum_{n=0}^{N-1} \overline{x}_n(x_{n+1} - x_n) \leq 4x_N^2,$$

$\overline{x}_n = \max_{0\leq i\leq n} x_i$.

(6) Найдите многочлены 1) 3-й, 2) 4-й степени от винеровского процесса W_t, являющиеся мартингалами. Коэффициенты могут зависеть от времени. Пример многочлена второй степени: $W_t^2 - t$.

(7) Используя формулу Ито

1) доказать, что

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s\, ds, \int_0^t W_s^2\, dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s\, ds.$$

2) найти итерационную формулу для $b_k(t) = \mathbb{E}W_t^k$.

(8) Пусть f — гладкая функция. Докажите, что $f(W_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds$ — мартингал.

(9) (Полиномы Эрмита) Докажите, что n-ая итерация стохастического интеграла

$$n!\int\cdots\int_{0\leq s_1\cdots s_n\leq t} dW_{s_1}\cdots dW_{s_n}$$

имеет вид $t^{n/2}H_n(W_t/\sqrt{t})$ — где H_n — многочлен Эрмита

$$H_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\big(e^{-\frac{x^2}{2}}\big)^{(n)}.$$

(10) Используя формулу Ито докажите, что процессы

$$(W_t + t)e^{-W_t - \frac{1}{2}t},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{\frac{W_t^2}{2(1+t)}}$$

является мартингалами

(11) Пусть τ — первый момент выхода процесса $Y_t = W_t + ct$ из интервала (a, b), $a < 0, b > 0$. Найти

$$P(Y_\tau = a), \quad P(Y_\tau = b), \quad \mathbb{E}\tau.$$

(12) Положим $\tau = \inf\{t : |W_t| = 1\}$. Найти $\mathbb{E}(\tau e^{-\lambda\tau})$, $\lambda > 0$.

(13) Найти среднее $\mathbb{E}(X_t)$ и ковариационную функцию $K(s,t) = \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E}X_t)(X_s - \mathbb{E}X_s)$ для решения стохастического уравнения

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dt + e^t dW_t, \quad X_0 = 0.$$

(14) Найти явное (с помощью обычных и стохастических интегралов) решение стохастического дифференциального уравнения.

(a) (процесс Орнштейна-Уленбека)

$$dx_t = ax_t dt + bdW_t.$$

(b) (Геометрическое броуновское движение)

$$dx_t = ax_t dt + bx_t dW_t.$$

(15) Пусть X_t — решение стохастического дифф. уравнения

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(t, X_s) dW_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

с липшицевыми коэффициентами σ, b (с константой C) на отрезке $[0, T]$. Доказать, что $\mathbb{E}X_t^2 \leq Ae^{Bt}$, найти явную зависимость A, B от X_0, T, C.