Занятие 14. Обобщенное и классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

1. Доказать, что оператор Лапласа на $C_0^2(\Omega)$ самосопряжен, и
$$(\Delta u, v) = \int_\Omega (\text{grad } u, \text{grad } v).$$

2. $|x| \in H^1(B_1(0,1)),\ x \in \mathbb{R}^1$.

3. Пусть $s < \frac{n}{2}$. Докажите, что тогда существует $\alpha > 0 : r^{-\alpha} \in H^s(B_n(0,1))$.

4. Докажите, что существует разрывная функция на плоскости, принадлежащая $H^1(B_2(0,1))$.

Определение 1 *Норма в пространстве H^s задается формулой:*
$$||u||_s^2 = \sum_{|\alpha| \le s} ||D^\alpha u||_{L^2}^2. \tag{1}$$

5. Формула (1) действительно задает норму.

6. Пространство H^s с нормой (1) полно.

7. Решение классической задачи для уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями является решением обобщенной.

8. Решить задачу Неймана на единичном круге:
$$\Delta u = 0,\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = g(\varphi).$$

Решено на занятии: 1, 3, 5, 6

На дом: 2, 4, 7, 8