Лекция 14. Пространства Соболева и решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

1 Гладкость ньютоновского потенциала.

Докажем, что ньютоновский потенциал гладок в тех точках, где гладка плотность.

Положим: $N(x) = |x|^{2-n}$ при $n > 2$, и $\ln|x|$ при $n = 2$.

Предложение 1 *Пусть $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$,*

$$u(x) = \int f(\xi)N(\xi - x)d\xi. \tag{1}$$

Тогда $u \in C^k$.

Доказательство Поскольку $N(\xi - x) = N(x - \xi)$, получаем:

$$u(x) = f * N.$$

Поскольку $N \in L^1_{\text{loc}}$, и функция f финитна, получаем, что $u \in C^k$. $\square$

Всюду ниже Ω - область в $\mathbb{R}^n$ с компактным замыканием.

Предложение 2 *Пусть функция f кусочно-непрерывна на $\mathbb{R}^n$, и $f|_\Omega \in C^k(\Omega)$, u - то же, что в (1). Тогда $u|_\Omega \in C^k(\Omega)$.*

Доказательство Пусть $x \in \Omega,\ \psi \in C^\infty$ - срезающая функция, равная 1 в некоторой окрестности x, обозначаемой U, и нулю вне большей окрестности x, принадлежащей Ω. Положим:

$$f = f_1 + f_2,\ f_1 = f\psi,\ f_2 = f(1-\psi).$$

Тогда $f_2|_U \equiv 0$. Положим:

$$u_j(x) = f_j * N = \int f_j(\xi - x)N(\xi)d\xi.$$

Функция f_1 - C^k-гладкая. Следовательно, u_1 гладкая по предложению 1. Далее,

$$u_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} f_2(\xi)N(x-\xi)d\xi.$$

При $x \in U$, функция $N(x-\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus U)$. Следовательно, $u_2|_U \in C^\infty(U)$. $\square$

2 Доказательство утверждения 1 теоремы 1 лекции 13.

Пусть $f \in C^2(\Omega)$, $Gf = \int_\Omega G(x,\xi)f(\xi)d\xi$, G - функция Грина для оператора Лапласа в области Ω с нулевыми граничными значениями. Напомним, что $G(x,\xi) = E(\xi - x) + U(x,\xi)$ в $\Omega \times \Omega$, причем $U \in C^2(\Omega \times \Omega) \cap C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$, U гладко по x. Тогда

$$G = G_1 + G_2,\ G_1 f = \int E(\xi - x)f(\xi)d\xi,\ G_2(f) = \int_\Omega U(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Интеграл $G_2 f$ - собственный, и функция U гладкая в Ω. Следовательно, $G_2 f$ гладко в Ω.

Функция $G_1 f$ - гладкая в Ω по предложению 1. Следовательно, $Gf \in C^2(\Omega)$. Значит, функция $g := \Delta G f$ - непрерывная в Ω. С другой стороны, $\Delta f = f$ в смысле D'. Значит, $g = f$, и $\Delta f = f$.

Этим доказано утверждение 1 теоремы 1 лекции 13.

3 Собственная функция сама себя сгладит.

Интегральный оператор G с симметричным ядром компактен при $n = 2$ и $n = 3$, поскольку при этих n фундаментальное решение оператора Лапласа принадлежит $L^2(\Omega)$. Следовательно, у него есть полная ортогональная система собственных функций. Но почему эти функции принадлежат области опрделения оператора Лапласа, т.е. дважды гладки?

Лемма 1 *Собственные функции оператора G бесконечно гладки.*

Доказательство Доказательство основано на том, что $E(x), D_{x_j}E(x) \in L^1(\Omega)$ для любого j. Имеем:

$$GX = \lambda X,\ X \in L^2(\Omega).$$

Следовательно, $GX \in C(\Omega)$. Но

$$X = \frac{1}{\lambda} GX$$

(то, что $\lambda \neq 0$ следует из равенства $\Delta GX = X$ в D'). Следовательно, X непрерывно.

Предложение 3 *Пусть $f \in C^k(\Omega)$, $k \geq 0$. Тогда $G \in C^{k+1}$.*

Лемма выводится из предложения 3 индукцией по k. База индукции - доказательство непрерывности функции $X = \frac{1}{\lambda}GX$, проведенное выше. Шаг дается предложением 3. $\square$

Доказательство [предложения 3] Стандартные рассуждения, проведенные выше, показывают, что достаточно доказать C^{k+1}-гладкость в точке x интеграла $\int X(\xi)\psi(\xi)E(x-\xi)d\xi$, где $\psi(\xi)\equiv 1$ в окрестности x и $\psi(\xi)\equiv 0$ в большей окрестности, принадлежащей Ω. Функция ψ нужна, чтобы можно было пренебречь двойной подстановкой в последующем интегрировании по частям.

Возьмем произвольную функцию Y в Ω так, что $Y_{x_j}=X,\ j\in\{1,\dots,n\}$ - любое. Тогда, полагая $y=\xi-x$, получим:

$$\int X\psi E(x-\xi)d\xi=-\int YD_{\xi_j}(\psi E(x-\xi))d\xi=-\int Y(y+x)D_{y_j}(\psi(y+x)E(y))dy.$$

Функция $D_{y_j}E|_\Omega\in L^1(\Omega)$. Подинтегальные члены, зависящие от x имеют непрерывные производные порядка $k+1$, если в диффернкецирование входит хоть одна производная по x_j. Поскольку j произвольно, это доказывает C^{k+1}-гладкость функции Gf. $\square$

4 Пространства H^s.

Определение 1 *Пространство H^s - это пространство всех функций из $L^2(\Omega)$, всех частные производные которых до порядка s, понимаемые в смысле обобщенных функций, принадлежат $L^2(\Omega)$.*

Замечание 1 *Функция $\frac{1}{r}$ в $\mathbb{R}^6$ принадлежит $H^1(B_6(0,1))$, но разрывна. Классическая импликация:*

дифференцируемость $\Rightarrow$ непрерывность

для обобщенных производных неверна.

Задача 1 $|x|\in H^1(B_1(0,1)),\ x\in\mathbb{R}^1$.

Задача 2 *a) Пусть $s<\frac{n}{2}$. Докажите, что тогда существует $\alpha>0:r^{-\alpha}\in H^s(B_n(0,1))$.*

b) Докажите, что существует разрывная функция на плоскости, принадлежащая $H^1(B_2(0,1))$.

Определение 2 *Норма в пространстве H^s задается формулой:*

$$||u||_s^2=\sum_{|\alpha|\le s}||D^\alpha u||_{L^2}^2. \tag{2}$$

Задача 3 *Формула (2) действительно задает норму.*

Задача 4 *Пространство H^s с нормой (2) полно.*

5 Теоремы вложения Соболева.

Теорема 1 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s > \frac{n}{2}$. *Тогда*

$$H^s(\Omega) \subset C(\Omega).$$

Теорема 2 *Пусть* Ω *то же,* $s > \frac{n}{2} + k$. *Тогда*

$$H^s \subset C^k(\Omega).$$

Теорема 3 *При* $s < t$, *вложение*

$$H^t \hookrightarrow H^s$$

компактно.

[Всюду ниже ноль должен стоять точно над H. Но это выходит за пределы моего владения техом. Ю.И.]

6 Пространство H_0^1 и неравенство Фридрихса.

Определение 3 *Пространство* H_0^1 *- это замыкание* $D(\Omega)$ *в* $H^1(\Omega)$.

Определение 4 *Норма в* H_0^1 :

$$||u||^2_{H_0^1} = (grad\ u,\ grad\ u) = \int_\Omega |grad\ u|^2 dx. \tag{3}$$

Теорема 4 *(Неравенство Фридрихса) Пусть* $u \in H_0^1$. *Тогда для каждой области* Ω *существует* C*:*

$$||u||^2_{L_2} \leq C||u||^2_{H_0^1} \tag{4}$$

Доказательство Достаточно рассмотреть случай $u \in D(\Omega)$, $\Omega \subset \{0 \leq x_n \leq R\}$ для некоторого R. Имеем:

$$u(x', x_n) = \int_0^{x_n} u_{x_n}(x', t)dt := I.$$

По неравенству Коши-Буняковского,

$$|u(x)|^2 = |I|^2 \leq R \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x', t)|^2 dt.$$

Интегрируя по Ω обе части, получаем:

$$||u||^2_{L^2} \leq C||u||^2_{H_0^1}.$$

□

7 Неоднородное уравнение Лапласа.

Классическая постановка. Дано $f \in C(\Omega)$. Найти $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$:

$$\Delta u = f, \ u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Обобщенная задача (5). Найти $u \in H_0^1 : \forall\ v \in H_0^1$,

$$[u, v] = (f, v). \tag{6}$$

Задача 5 *Решение классической задачи является решением обобщенной.*

Теорема 5 *Решение обобщенной задачи* (6) *существует и единственно.*

Доказательство Теорема 5 следует из теоремы Рисса: линейный непрерывный функционал в Гильбертовом пространстве задается скалярным произведением на некоторый вектор.

Функционал $v \mapsto (f, v)$ непрерывен в $L^2(\Omega)$ и задается как раз скалярным умножением на f. Но он непрерывен и в $H_0^1(\Omega)$! Значит, он задается также скалярным произведением $[\cdot, v]$ на некоторый вектор. Этот вектор, определенный однозначно, и есть u. □

8 Обобщенная задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Классическая постановка. Дана непрерывная функция $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Найти $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$:

$$\Delta u = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Перейти немедленно к обобщенной постановке мешает то факт, что для функций из H^1 их ограничение нак подмногообразие не определено. Поэтому поступают так.

Пусть g - дважды гладкая функция в $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, равная φ на границе (для областей с гладкой границей такая функция всегда существует, но мы это не доказываем, а постулируем). Положим:

$$v = u - g.$$

Тогда для классического решения

$$\Delta v = f, \ f = -\Delta g,$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Обобщенная задача Дирихле.
Дана функция $f \in C(\bar{\Omega})$. Найти функцию $v \in H_0^1$:

$$\Delta v = f.$$

Разрешимость этой задачи мы уже доказали. Тем самым, доказана и разрешимость задачи: дана функция $g \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$; найти функцию $u \in H^1 : u - g \in H_0^1,\ \Delta(u-g) = -\Delta g$ в смысле $[u-g, v] = (-\Delta g, v)\ \forall\ v \in H_0^1$.

9 От обобщенного решения - к классическому.

Мы докажем, что если исходные данные в задаче (6) достаточно хорошие, то ее обобщенное решение удовлетворяет уравнению Пуассона в классическом смысле.

Предложение 4 *Пусть $f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Тогда обощенное решение задачи* (6) *удовлетворяет уравнению $\Delta u = f$ в классическом смысле.*

Доказательство Продолжим функцию f нулем в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ и рассмотрим потенциал:

$$u(x) = \int f(\xi) E_n(x - \xi) d\xi,$$

где E_n - фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Мы доказали (при $n = 2$ и 3; в общем случае долазательство аналогично), что $\Delta u = f$ в Ω. Тогда разность $v = u - U$ - гармоническая функция в D'. По лемме Вейля, доказанной ниже, v - гармоническая функция в C^2. $\square$

Равенство нулю на границе обобщенного решения задачи (6) при достаточно гладкой функции f доказывается по следуюшей схеме. Пусть $f \in C^{k+2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Тогда решение u задачи (6) принадлежит $H^s \cap G_0^1$. Если $s > \frac{n}{2}$, то $u \in C(\bar{\Omega})$ по теореме вложения Соболева. Тогда $u|_{\partial\Omega}$ в классическом смысле. Мы не будем проводить это рассуждение подробно.

10 Лемма Вейля.

Лемма 2 *Пусть обобщенная функция f является гармонической. Тогда она регулярна и задается обычной гармонической функцией.*

На самом деле, в лемме Вейля $u \in L^1_{\text{loc}}$ (при Вейле не было обобщенных функций), но замена интегрируемых функций на обобщенные мало что меняет.)

Доказательство Рассмотрим произвольную неотрицательную четную финитную функцию φ на $\mathbb{R}^1$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)dx = 1$, и δ-образную последовательность в $\mathbb{R}^n : \varphi_m = m^n \varphi(m|x|)$, $\int \varphi_m = 1$. Тогда

$$u * \varphi_m = u_m \to u \text{ в } D'.$$

Пусть $u_{mk} = u_m * \varphi_k$. Тогда все u_{mk} и u_k гармоничны, и

$$u_{mk} \to u_k \text{ в } D'.$$

Но мы докажем, что $u_{mk} = u_m$. Тогда $u_k = u$. Значит, все $u_k = u$, и все u_k совпадают между собой. Равенство $u_{mk} = u_m$ следует из теоремы о среднем, как показано ниже.

Предложение 5 *Пусть* $\varphi(x) = \psi(|x|)$, φ *финитна и гармонична в окрестности supp* φ, *причем* $\int \varphi dx = 1$. *Тогда*

$$\int u\varphi dx = u(0).$$

Доказательство Пусть $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R)$. Тогда

$$\int u\varphi dx = \int_0^R dr \int_{|x|=r} u(x)\psi(r)dr = \int_0^R u(0)\psi(r)\sigma_{n-1}r^{n-1}dr =$$

$$u(0)\int_0^R dr \int_{|x|=r} \varphi(x)ds = u(0)\int \varphi dx = u(0).$$

Второе равенство использует теорему о среднем для гармонических функций. $\square$

Предложение 5 влечет равенство $u_{mk} = u_k$ и доказывает лемму Вейля.

$\square$