Семинар 14

Кэлеровы тройки

В задачах 1 - 2 даны: комплексное векторное пространство V, его овеществление $W = V_{\mathbb{R}}$, эрмитово скалярное произведение $H(x,y)$ на V и соответствующая ему кэлерова тройка структур $(I,\ g,\ \omega) =$ (комплексная, евклидова, симплектическая структура) на W.

1. Пусть $e_1, ..., e_n$ - базис в V и $e_1, ..., e_n, Ie_1, ..., Ie_n$ - соответствующий ему базис в W. В этом базисе напишите матрицы Грама $\mathbf{I}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{\Omega}$ для I, g и ω соответственно. Как связаны эти матрицы?

2. Рассмотрим евклидову и симплектическую структуры g и ω на W как изоморфизмы $g:\ W \xrightarrow{\sim} W^\vee,\ x \mapsto g(x,-)$ и $\omega:\ W \xrightarrow{\sim} W^\vee,\ x \mapsto \omega(x,-)$, где $W^\vee$ - двойственное к W пространство. Докажите, что оператор комплексной структуры $I:\ W \to W$ есть композиция $I = \omega^{-1} \circ g:\ W \xrightarrow{g} W^\vee \xrightarrow{\omega^{-1}} W$.

Кватернионы

В задачах 3 - 4 рассматривается тело кватернионов $\mathbb{H}$, $(q_1, q_2) := \mathrm{Re}(q_1\overline{q_2})$ - скалярное произведение на $\mathbb{H}$, $\mathbb{I}$ - его $\mathbb{R}$-подпространство чисто мнимых кватернионов, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{I}$ - так называемые мнимые единицы, удовлетворяющие свойствам

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \tag{1}$$

3. Проверьте, что $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{I}$. Тем самым, эти векторы задают изоморфизм евклидова пространства $(\mathbb{I},\ (,))$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением. Докажите, что при этом изоморфизме произведение кватернионов pq совпадает с векторным произведением $p \times q$.

4. Пусть тройка чисто мнимых кватернионов q_1, q_2, q_3 удовлетворяет условиям, аналогичным условиям (1):

$$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = -1, \quad q_1q_2 = q_3 = -q_2q_1, \quad q_2q_3 = q_1 = -q_3q_2, \quad q_3q_1 = q_2 = -q_1q_3. \tag{2}$$

Докажите, что $q_1q_2,\ q_3$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{I}$, согласованный с базисом $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Группа $SO(3)$

5. Рассмотрим матрицу $N = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$, где $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Докажите, что существует такая матрица $X \in SO(3)$, что

(i) векторы $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ связаны соотношением $\mathbf{k} = X\mathbf{n}$, и

(ii) $N = X^T N_0 X$, где $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Выведите из свойства (i) следующие соотношения для матрицы N:

$$N^3 = -N, \quad N^4 = -N^2, \quad N^5 = N, \ldots.$$

6. (i) Докажите, что всякий элемент g группы $SO(3)$ как поворот на угол φ, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, около оси с направляющим вектором $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, где $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, представим в виде матрицы $R_{\varphi,\mathbf{n}} = E + (\sin\varphi)N + (1 - \cos\varphi)N^2$, где N - матрица из задачи 5.

(ii) Воспользовавшись задачей 5, выведите отсюда, что $R_{\varphi,\mathbf{n}} = \exp(\varphi N)$.