Листок 9

1. Пусть P – эрмитова матрица. Доказать эквивалентность следующих трех утверждений:
а) $P > 0$, то есть $x^*Px > 0$, если $x \neq 0$;
б) $P = B^*B$ для некоторой невырожденной матрицы B;
в) все собственные значения матрицы P положительны.

2. Пусть A – $n \times k$-матрица. Доказать, что матрицы A, A^*, A^*A, AA^* имеют одинаковый ранг.

3. Пусть λ – наименьшее, а μ – наибольшее собственное значение эрмитовой матрицы $A = (a_{ij})$. Доказать, что $\lambda \leq a_{ii} \leq \mu$.

4. Доказать, что перестановочные операторы A и B в унитарном протранстве могут быть одновременно записаны верхне-треугольными матрицами в некотором ортонормальном базисе.

5. Доказать, что любую комплексную квадратную матрицу можно представить в виде произведения унитарной и верхне-треугольной матриц.

6. Как связаны жордановы нормальные формы операторов A и A^*?

7. Пусть A – невырожденная комплексная квадратная матрица. Доказать, что существуют такие унитарная матрица U и положительная эрмитова матрица P того же порядка, что $A = UP$. Доказать, что такое разложение определено однозначно.

8. Пусть A и B – две комплексные $n \times n$ матрицы. Доказать эквивалентность следующих двух условий:
а) $B = UA$ для некоторой унитарной матрицы U;
б) $A^*A = B^*B$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n}$, снабженное канонической евклидовой структурой $g(u,v) = u^t v$, u, v – вектор-столбцы в $\mathbb{R}^{2n}$, и канонической симплектической структурой $\omega(u,v) = u^t J_n v$,где $J_n = \left(\begin{smallmatrix} O & -E_n \\ E_n & O \end{smallmatrix}\right)$.

Отождествим $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{C}^n$, сопоставив вещественный вектор-столбец $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)^t$ комплексному вектор-столбцу $(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)^t$.

9. Докажите,что при таком отождествлении:
а) линейная операция $z \to iz$ в $\mathbb{C}^n$ превращается в линейное преобразование $v \to J_n v$ пространства $\mathbb{R}^{2n}$;
б) отображение $X + iY \to \left(\begin{smallmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{smallmatrix}\right)$ осуществляет вложение группы $GL(n, \mathbb{C})$ в группу $GL(2n, \mathbb{R})$.

10. Докажите, что $H(u,v) = g(u,v) - ig(J_n u, v)$ задает эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, и при этом $U(H) = O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap Sp(2n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n)$. (Пересечения берутся в группе $GL(2n, \mathbb{R})$.)