Лекция № 9

На прошлой лекции мы разобрали свойства структур коалгебры:

- коумножения $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$
- коединицы $\varepsilon: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

$\boxed{D}$ Если коумножение удовлетворяет соотношению $P\circ\Delta = \Delta$, где P — операция транспозиции факторов тензорного квадрата $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \xrightarrow{P} \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$:

$$P(a\otimes b) = b\otimes a,$$

то такая коалгебра называется кокоммутативной.

Свойства Δ и ε можно описать, потребовав коммутативности диаграмм отображений:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[dr, "id\otimes\Delta"'] & \mathcal{A} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[dl, "\Delta\otimes id"] \\ & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

Коассоциативность операции Δ.

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal, "id"] & A\otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"] \\
A\otimes C \arrow[r, phantom, "\cong"] & A \arrow[r, phantom, "\cong"] & C\otimes A
\end{tikzcd}$$

$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\varepsilon)\circ\Delta$$

Свойство коединицы. Отметим ещё раз, что диаграммы для Δ и Δ, ε только направлениями стрелок отличаются от диаграмм, задающих свойства умножения и единицы в алгебре A.

Рассмотрим теперь третью операцию: отображение антипода S (или, кратко, антипод).

Пусть <u>линейное</u> отображение $S: A \to A$ является, кроме того, <u>антигомоморфизмом</u> алгебры A:

$$S(a\cdot b) = S(b)\cdot S(a) \quad \forall a, b \in A$$

$$S(e_A) = e_A$$

единица алгебры A.

Тогда по любому представлению $T: A \to End(V)$ можно построить представление T^* в двойственном пространстве V^*:
$T^*: A \to End(V^*)$.

Делается это так: пусть $\xi \in V^*$ — произвольный линейный функционал на V. Для $\forall a \in A$ действие $T^*(a) \triangleright \xi = \tilde{\xi}_a$ дает новый линейный функционал и по определению, спаривание ξ_a с $\forall v \in V$ имеет вид: $\langle \xi_a, v \rangle := \langle \xi, T(S(a)) \triangleright v \rangle$

Или: $\boxed{\langle T^*(a) \triangleright \xi, v \rangle := \langle \xi, T(S(a)) \triangleright v \rangle}$

$\forall a \in A$, $\forall \xi \in V^*$ и $\forall v \in V$.

$\boxed{\text{У}}$ Отображение $T^*: A \to End(V^*)$ заданное формулой — представление алгебры A в двойственном линейном пространстве V^*.

Доказательство:

Надо проверить $T^*(e_A) = id_{V^*}$, и $T^*(a \cdot b) = T^*(a) T^*(b)$.

Первое свойство немедленно следует

из того, что $S(e_A)=e_A$ и
$T(e_A)=id_V$.

Второе свойство означает, что последовательное действие $T(a)\triangleright(T(b)\triangleright\xi)$ совпадает с действием оператора, отвечающего произведению $a\cdot b=\mu(a,b)$ элементов a и b в A.

Проверяем: фиксируем $\forall\ \xi\in V^*$ и $v\in V$.

Тогда

$$\langle T^*(a)\triangleright(T^*(b)\triangleright\xi), v\rangle =$$

$$=\langle T^*(b)\triangleright\xi, T(S(a))\triangleright v\rangle =$$

$$=\langle\xi, T(S(b))\triangleright(T(S(a))\triangleright v)\rangle =$$

$= \Big($ T - представление A в $V \Rightarrow T(\tilde a)\triangleright(T(\tilde b)\triangleright v)$ $= T(\tilde a\tilde b)\triangleright v$ $\Big) =$

$=\langle\xi, T(\underline{S(b)S(a)})\triangleright v\rangle = \big($ S - $\underline{\text{анти}}$гомоморфизм $\big) = \langle\xi, T(S(ab))\triangleright v\rangle =$

$$=\langle T^*(ab)\triangleright\xi, v\rangle \quad \blacksquare$$

Пусть $\dim V<\infty$. Тогда $End(V)\cong V\otimes V^*$.
Наличие Δ и S позволяет по всякому
$T: A\to End(V)$ построить представление

$$Q: \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V \otimes V^*) =$$
$$= \mathrm{End}(\mathrm{End}(V)),$$

т.е. Q задаёт действие алгебры $\mathcal{A}$ на линейных операторах, действующих в пространстве V.

Явный вид этого действия проще всего получить с помощью дуальных базисов $\{\epsilon_i\} \in V^*$ и $\{e_i\} \in V$:

$$\langle \epsilon_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим $\forall\, \hat{F} \in \mathrm{End}(V)$. Матрица этого оператора в базисе $\{e_i\}$ есть, по определению, следующее:

$$\hat{F} \triangleright e_i = e_j \mathbb{F}_{ji}$$ (напомним про Σ по j от 1 до $\dim V$)

Найдём матрицу оператора $\hat{T}^*(a)$, представляющего элемент $a \in \mathcal{A}$ в виде оператора в $\mathrm{End}(T^*)$.

$$\hat{T}^*(a) \triangleright \epsilon_i := \epsilon_j \mathbb{T}^*(a)_{ji}$$

$$\langle \hat{T}^*(a) \triangleright \epsilon_i, e_k \rangle = \mathbb{T}^*(a)_{ji} \langle \epsilon_j, e_k \rangle =$$
$$= \mathbb{T}^*(a)_{ki}$$

С другой стороны, по определению

действия в V^*:

$$\langle \hat{T}^*(a) \triangleright \epsilon_i, e_k \rangle = \langle \epsilon_i, \hat{T}(S(a)) \triangleright e_k \rangle =$$
$$= \langle \epsilon_i, e_r \mathbb{T}(S(a))_{rk} \rangle = \mathbb{T}(S(a))_{ik}$$

Таким образом: $\mathbb{T}^*(a)_{ki} = \mathbb{T}(S(a))_{ik}$ – матрица оператора, представляющего элемент a в пространстве V^*, равна транспонированной матрице оператора, представляющего $S(a)$ в пространстве V.

Представим теперь $a \in A$ в пространстве $V \otimes V^*$:

$$a \xrightarrow{\Delta} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \xrightarrow{T \otimes T^*} \hat{T}(a_{(1)}) \otimes \hat{T}^*(a_{(2)}) \in \operatorname{End}(V \otimes V^*).$$

Произвольный $\hat{F} \in \operatorname{End}(V)$ с матрицей $\mathbb{F} = \|\mathbb{F}_{ij}\|$ задается линейной комбинацией векторов из $V \otimes V^*$:

$$\hat{F} \triangleright e_i = e_j \mathbb{F}_{ji} \Leftrightarrow \hat{F} \rightarrow e_i \mathbb{F}_{ij} \otimes \epsilon_j$$

Теперь $\hat{Q}(a) \in \operatorname{End}(V \otimes V^*)$ действует на $e_i \mathbb{F}_{ij} \otimes \epsilon_j$ так:

$$\hat{Q}(a) \triangleright (e_i \mathbb{F}_{ij} \otimes \epsilon_j) = (\hat{T}(a_{(1)}) \triangleright e_i) \mathbb{F}_{ij} \otimes \hat{T}^*(a_{(2)}) \triangleright \epsilon_j =$$

$= e_k \mathbb{T}(a_{(1)})_{ki} F_{ij} \otimes \epsilon_r \mathbb{T}^*(a_{(2)})_{rj} = \quad \Leftarrow ? =$

$=$ (подставляем $\mathbb{T}^*(a_{(2)})_{rj} = \mathbb{T}(S(a_{(2)}))_{jr}$) $=$

$= e_k \left(\mathbb{T}(a_{(1)}) \cdot \mathbb{F} \cdot \mathbb{T}(S(a_{(2)})) \right)_{kr} \otimes \epsilon_r \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{T}(a_{(1)}) \mathbb{F} \mathbb{T}(S(a_{(2)}))$ – матрица оператора $\hat{Q}(a) \triangleright \hat{F}$, то есть:

$$\boxed{\begin{gathered} \hat{Q}(a) \triangleright \hat{F} = \hat{T}(a_{(1)}) \hat{F} \hat{T}(S(a_{(2)})), \\ \text{где } \Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)} \end{gathered}}$$

В силу гомоморфности Δ:

$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) = a_{(1)} b_{(1)} \otimes a_{(2)} b_{(2)}$ мы получаем гомоморфность $\hat{Q}$:

$$\hat{Q}(a \cdot b) = \hat{Q}(a) \hat{Q}(b).$$

Кроме того, т. к. $\Delta(e_A) = e_A \otimes e_A \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{Q}(e_A) = id_{V \otimes V^*}$ – тождественный оператор в пространстве $End(V)$.

До сих пор мы использовались только антигомоморфностью S.

Рассмотрим в $End(V)$ тождест- = 8 =
венный оператор $\hat{1}_V$: $\hat{1}_V \triangleright v = v \quad \forall v \in V$.
и потребуем, чтобы порождаемое им одномерное подпространство было инвариантным относительно действия $\hat{Q}(a)$: $\quad \hat{Q}(a) \triangleright \hat{1}_V = \lambda(a) \hat{1}_V \quad \lambda(a) \in \mathbb{C}$.
Из свойств $\hat{Q}(a)$ сразу имеем, что $\lambda(a)$ - гомоморфизм $A \to \mathbb{C}$ (одномерное представление. Такое у нас уже есть: это коединица ε.
Итак, выберем $\lambda(a) = \varepsilon(a)$.
Учитывая, что $\hat{1}_V = \hat{T}(e_A)$, получим:

$$\hat{Q}(a) \triangleright \hat{1}_V = \hat{T}(a_{(1)}) \hat{1}_V \hat{T}(S(a_{(2)})) =$$

$$= \hat{T}(a_{(1)} S(a_{(2)})) = \varepsilon(a) \hat{T}(e_A) = $$

$$= \hat{T}(\varepsilon(a) e_A)$$

Естественное требование:

$$a_{(1)} S(a_{(2)}) = \varepsilon(a) e_A =$$

$$= (\eta \circ \varepsilon)(a)$$

$\boxed{3}$ Для правых дуальных пространств получилось бы аналогичное выражение: $\quad S(a_{(1)}) a_{(2)} = \varepsilon(a) e_A = (\eta \circ \varepsilon)(a)$

Таким образом, получаем важное свойство антипода:

$$S(a_{(1)})a_{(2)} = a_{(1)}S(a_{(2)}) = \varepsilon(a)e_A$$

$\forall a\in A$.

На языке композиции отображений имеем:

$$m\circ(id\otimes S)\circ\Delta = \eta\circ\varepsilon = m\circ(S\otimes id)\circ\Delta$$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[d, "id\otimes S"] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & A\otimes A \arrow[d, "S\otimes id"] \\
 & \mathbb{C} \arrow[d, "\eta"] & \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A & A\otimes A \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

(Здесь m – умножение в A, η – гомоморфизм единицы).

Применяется следующая терминология:

A с m. и η – алгебра

A с Δ и ε – коалгебра

A с m, η, Δ и ε – биалгебра

A с $m, \eta, \Delta, \varepsilon$ и S – алгебра Хопфа.

$\boxed{3}$ Можно показать, что свойство

$$m\circ(id\otimes S)\circ\Delta = \eta\circ\varepsilon = m\circ(S\otimes id)\circ\Delta$$

где S — линейное отображение $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ влечёт свойство антигомоморфности S:

$$S(ab) = S(b)S(a).$$

Кроме того, ~~[illegible]~~ имеют место такие свойства:

$$(S\otimes S)\circ\Delta = P\circ\Delta\circ S$$

$$\varepsilon\circ S = \varepsilon$$

Транспозиция факторов в $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$.

Рассмотрим теперь примеры алгебр Хопфа.

(1.) Универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли.

Рассмотрим конечномерную алгебру Ли $\mathcal{L}$ с базисом $\{e_i\}_{1\le i\le N}$ и скобкой Ли $[e_i, e_j] = C_{ij}^{k} e_k$, где C_{ij}^{k} — числовые структурные константы.

$\boxed{O}$ Универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ – бесконечномерная ассоциативная алгебра с единицей, которая представляет собой следующую фактор-алгебру:

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}) = \frac{\mathbb{T}(\mathcal{L})}{\langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - C_{ij}{}^k e_k \rangle_{1 \le i,j \le N}}.$$

Здесь $\langle \mathcal{J} \rangle$ – двусторонний идеал в свободной тензорной алгебре $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ линейного пространства $\mathcal{L}$, порожденный набором векторов $\mathcal{J}$ из $\mathbb{T}(\mathcal{L})$.

Алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ представляется в виде суммы однородных компонент

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}^{(k)},$$

где $\mathcal{U}^{(0)} = 1_{\mathcal{U}}\, \mathbb{C}$, $\mathcal{U}^{(1)} = \mathcal{L}$, а единица $\mathcal{U}(\mathcal{L})$

$$\mathcal{U}^{(k)} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \}_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le N}.$$

Тот факт, что базисом $U^{(k)}$ являются мономы $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_k}$ для всех наборов $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le n$ является содержанием теоремы Пуанкаре - Биркгофа - Витта.

Если $\mathcal{L}$ - неабелева алгебра Ли, то $U(\mathcal{L})$ - некоммутативная ассоциативная алгебра.

Пример: $U(sl_2)$ порождается 3 векторами e, f и h с перестановочными соотношениями

$$he-eh=2e$$
$$hf-fh=-2f$$
$$ef-fe=h$$

(не будем писать значок $\otimes$ для краткости).

Базис в $U^{(k)}$: $f^{k_1}h^{k_2}e^{k_3}$ $\quad k_1+k_2+k_3=k$, $k_i\ge 0$.

$\boxed{\text{У}}$ $U(\mathcal{L})$ является алгеброй Хопфа. На базисных генераторах e_i коумножение Δ, коединица ε и антипод S действуют следующим образом:

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1_\mathcal{U} + 1_\mathcal{U} \otimes e_i$$

$$\Delta(1_\mathcal{U}) = 1_\mathcal{U} \otimes 1_\mathcal{U}$$

$$\varepsilon(e_i) = 0 \quad \varepsilon(1_\mathcal{U}) = 1$$

$$S(e_i) = -e_i \quad S(1_\mathcal{U}) = 1_\mathcal{U}$$

На все остальные элементы $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ их действие распространяется по свойству (анти)гомоморфности:

$$\Delta(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = \Delta(e_{i_1})\Delta(e_{i_2}) \dots \Delta(e_{i_k})$$

и т. д.

Доказательство:

Надо проверить, что заданные действием на генераторы e_i отображения Δ, S и ε сохраняют перестановочные соотношения $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, то есть, действительно являются (анти)гомоморфизмами (по-другому, идеал в $\mathbb{I}(\mathcal{L})$, по которому берется фактор, отправляется в 0 действием Δ, S и ε).

(i) $\Delta(e_ie_j - e_je_i - c_{ij}^k e_k) =$

$= \Delta(e_i)\Delta(e_j) - \Delta(e_j)\Delta(e_i) - c_{ij}^k \Delta(e_k) =$

$= \underline{e_ie_j \otimes 1_u} + 1_u \otimes e_ie_j - \underline{e_je_i \otimes 1_u} -$

$- 1_u \otimes e_je_i - c_{ij}^k(\underline{e_k \otimes 1_u} + 1_u \otimes e_k) =$

$= (e_ie_j - e_je_i - c_{ij}^k e_k) \otimes 1_u +$

$+ 1_u \otimes (e_ie_j - e_je_i - c_{ij}^k e_k) = 0.$

(ii) $\varepsilon(e_ie_j - e_je_i - c_{ij}^k e_k) = 0$, т.к. $\varepsilon(e_i) = 0$ $\forall i$

(iii) $S(e_ie_j - e_je_i - c_{ij}^k e_k) =$

$= \underline{S(e_j)S(e_i)} - S(e_i)S(e_j) - c_{ij}^k S(e_k) =$

S – __анти__гомоморфизм

$= \{ S(e_i) = -e_i \} = e_je_i - e_ie_j + c_{ij}^k e_k = 0$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Коумножение Δ в $U(\mathcal{L})$ __ко-коммутативно__: $\Delta = P \circ \Delta$.

Это коумножение хорошо известно

в квантовой механике: оно применяется в теории углового момента.

Упражнение * Проверьте самостоятельно:

(а) Свойство ко-ассоциативности Δ:

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$$

(б)

$$m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$

(в) $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id$

Пусть есть представление

$$T : \mathcal{L} \to End(V)$$

алгебры Ли в пространстве V, то есть $\forall g \in \mathcal{L}$ сопоставляется $\hat{T}(g) \in End(V)$ и это сопоставление сохраняет структуру алгебры Ли:

$$\hat{T}([g, f]) = \hat{T}(g)\hat{T}(f) - \hat{T}(f)\hat{T}(g)$$

(иначе говоря это гомоморфизм $\mathcal{L} \to gl(V)$).

Какое представление будет на операторах из $\mathrm{End}(V)$? То есть, построим явно действие $\hat{Q}(e_i) \triangleright \hat{F}$, где $\hat{F}$ – $\forall$ линейный оператор на V.

Поскольку $\Delta(e_i) = e_i \otimes 1_u + 1_u \otimes e_i$, то наши общие формулы дают следующее:

$$\hat{Q}(e_i) \triangleright \hat{F} = \hat{T}(e_{i(1)}) \hat{F} \hat{T}(S(e_{i(2)})) =$$

$$= \hat{T}(e_i) \hat{F} \hat{T}(S(1_u)) + \hat{T}(1_u) \hat{F} \hat{T}(\underbrace{S(e_i)}_{= -e_i}) =$$

$$= \hat{T}(e_i) \hat{F} \cdot \underbrace{1_V}_{T(1_u)} - 1_V \hat{F} \hat{T}(e_i) =$$

$$= [\hat{T}(e_i), \hat{F}].$$

Мы пришли к известному результату: если дано представление $\mathcal{L}$ в пространстве V, то на операторах из $\mathrm{End}(V)$ тоже задано представление: коммутаторами с $\hat{T}(g)$ ("присоединённое действие").

2. Групповая алгебра конечной группы G.

Пусть G - конечная группа с числом элементов N.

$\boxed{O}$ $\mathbb{C}[G]$ - групповая алгебра группы G - это N-мерное линейное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом $\{e_1, \dots, e_N\}$ параметризованном произвольной фиксированной нумерацией элементов G: $g_1, g_2, \dots, g_N$:

$$e_i \Leftrightarrow g_i$$

Структура ассоциативной алгебры на $\mathbb{C}[G]$ задается групповым умножением.

Если $g_a g_b = g_c$ то $e_a e_b = e_c$.

$\boxed{B}$ Часто опускают e и условно обозначают базис в $\mathbb{C}[G]$ теми же буквами, что и элементы группы:

$$\mathbb{C}[G] = Span_{\mathbb{C}}(g_1, \dots, g_N) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall u \in \mathbb{C}[G]: \quad u = \sum_{k=1}^{N} u_k g_k \,, \quad u_k \in \mathbb{C}.$$

Эта некоммутативная (для неабелевой G) алгебра обладает Хопфовой структурой:

$\boxed{\text{У}}$ На базисных элементах $\mathbb{C}[G]$ ко-структуры задаются соотношениями:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(g_i)=g_i\otimes g_i\\ \varepsilon(g_i)=1\end{array}\right\}\text{ гомоморфизмы}$$
$$S(g_i)=g_i^{-1}\ \}\text{ Антигомоморфизм.}$$

Упражнение

Проверьте все аксиомы алгебры Хопфа для приведённых выше формул.

Зам. Ко-умножение снова ко-коммутативно.

Зам. Правило $\Delta(g_i)=g_i\otimes g_i$ даёт известный закон тензорного умножения представлений группы: если $T_V: G\to End(V)$ и $T_U: G\to End(U)$ 2 представления в пространствах V и U, то в их тензорном произведении представление групповой алгебры задаётся формулой:

$$c_k g_k \longmapsto c_k\hat{T}_V(g_k)\otimes\hat{T}_U(g_k)\in$$
$$\in End(V)\otimes End(U)=$$
$$=End(V\otimes U)$$

$\boxed{\text{Упражнение}^{*}}$ Пусть задано представление G в конечномерном линейном пространстве ~~G~~ V:

$$T: G \to End(V): \ \forall g \in G \mapsto \hat{T}(g) \in End(V)$$

<u>Терминология</u>: пространство V в котором действует линейное представление G называют также G-модулем.

Постройте по заданному представлению T и Хопфовой структуре $C[G]$ представление G в $End(V)$:

$$\forall g \in G \longmapsto \hat{Q}(g) \in End(End(V)).$$

Найдите выражение для действие

$$\hat{Q}(g) \triangleright \hat{F}, \text{ где } \hat{F} - \forall \text{ элемент из } End(V).$$

---

③ <u>Алгебра гладких (∞ дифференцируемых) функций на группе Ли.</u>

Рассмотрим <u>коммутативную</u> алгебру $\mathcal{F}(G)$ ∞ дифф. функций на группе Ли G:

$$f: G \to \mathbb{C}, \quad (f_1 \cdot f_2)(g) \overset{def}{=} f_1(g) \cdot f_2(g) -$$

$-$поточечное умножение,

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(g) = \alpha f_1(g) + \beta f_2(g), \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Это, очевидным образом, ассоциативная алгебра с $1_{\mathcal{F}}$ — функцией, постоянной на G:

$$1_{\mathcal{F}}(g) = 1 \quad \forall g \in G.$$

При построении Хопфовой структуры возникает специфическая для ∞ мерных пространств сложность: во первых,

$$\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \neq \mathcal{F}(G \times G),$$

пространство $\mathcal{F}(G \times G)$, вообще говоря, сильно больше. Но если, как это сделали мы, $\mathcal{F}(G)$ — множество гладких ф-ций, то

$$\mathcal{F}(G \times G) \cong \mathcal{F}(G) \hat{\otimes} \mathcal{F}(G),$$

где $\hat{\otimes}$ означает расширение обычного тензорного произведения сходящимися рядами, построенными из всех элементов $\mathcal{F}(G)$ таких, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \otimes h_k$ сходится в любой точке $(g_1, g_2) \in G \times G$: то есть, $\forall\, g_1$ и $g_2 \in G$ существует конечный предел:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(g_1) h_k(g_2).$$

С таким пополнением уже есть изоморфизм

$$\mathcal{F}(G)\hat{\otimes}\hat{\mathcal{F}}(G)\cong\mathcal{F}(G\times G)$$

∞ дифференцируемые функции на $G\times G$.

Действительно, пусть $\psi\in\mathcal{F}(G\times G)$. Её значение $\psi(g_1,g_2)$ есть гладкая функция 2х наборов групповых параметров, характеризующих g_1 и g_2. Разложим ψ в ряд по параметрам g_1 (или g_2), тогда коэффициенты этого разложения будут функциями от g_2 (или, соотв., g_1):

$$\psi(g_1,g_2)=\sum_{i=0}^{\infty}f_i(g_1)h_i(g_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\psi=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\otimes h_i\in\mathcal{F}(G)\hat{\otimes}\hat{\mathcal{F}}(G).$$

Здесь мы по определению полагаем

$$\left(\sum f_i\otimes h_i\right)(g_1,g_2):=\sum_i f_i(g_1)h_i(g_2).$$

Зададим теперь на коммутативной алгебре $\mathcal{F}(G)$ структуру алгебры Хопфа.

$\boxed{V}$ Коумножение $\Delta: \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$:

$$\begin{cases} (\Delta f)(g_1, g_2) := f(g_1 \cdot g_2) \\ \varepsilon(f) := f(e_G) \text{ — коединица} \\ \qquad\quad \uparrow \\ \quad \text{Единица группы } G. \\ S(f)[g] := f(g^{-1}) \end{cases}$$

$\forall f \in \mathcal{F}, \forall g \in G$

Доказательство:

Представим функцию Δf в виде, обсуждавшемся выше:

$$\Delta f = \sum_i \varphi_i' \otimes \varphi_i'', \text{ где } \varphi_i' \text{ и } \varphi_i'' \in \mathcal{F}(G) \text{ и}$$

для $\forall g_1$ и $g_2 \in G$:

$$\sum_i \varphi_i'(g_1) \varphi_i''(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$$

Заметим, что разбираемый пример представляет собой не кокоммутативную алгебру Хопфа:

$$(P \circ \Delta)(f)(g_1, g_2) = \sum_i \varphi_i''(g_1) \varphi_i'(g_2) =$$

$$= f(g_2 g_1) \neq f(g_1 g_2) = \Delta(f)(g_1, g_2)$$

если G неабелева.

Теперь коассоциативность Δ следует из ассоциативности группового умножения:

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta f = \sum_i \varphi_i' \otimes \Big(\sum_j \tilde{\varphi}_{ij} \otimes \tilde{\tilde{\varphi}}_{ij} \Big)$$

Здесь $\Delta \varphi_i'' = \sum_j \tilde{\varphi}_{ij} \otimes \tilde{\tilde{\varphi}}_{ij}$ и

для $\forall\, g, h \in G$: $\sum_{ij} \tilde{\varphi}_{ij}(g)\, \tilde{\tilde{\varphi}}_{ij}(h) = \varphi_i''(gh)$.

Теперь получаем:

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(f)(g_1, g_2, g_3) =$$

$$= \sum_{ij} \varphi_i'(g_1)\, \tilde{\varphi}_{ij}(g_2)\, \tilde{\tilde{\varphi}}_{ij}(g_3) =$$

$$= \sum_i \varphi_i'(g_1)\, \varphi_i''(g_2 \cdot g_3) = f(g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3))$$

Аналогично

$$(\Delta \otimes id) \circ f(g_1, g_2, g_3) = f((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3)$$

В силу ассоциативности умножения в G и произвольности $f \in \mathcal{F}(G)$, заключаем, что

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta.$$

$$m\circ(id\otimes S)\Delta(f) = m\left(\sum_i \phi_i'\otimes S(\phi_i'')\right) = 21 =$$

$$= \sum_i \phi_i'\cdot S(\phi_i'')$$

На произвольный $g\in G$ это действует так:

$$\sum_i \phi_i'(g)\, S(\phi_i'')(g) = \sum_i \phi_i'(g)\,\phi_i''(g^{-1}) =$$

$$= f(g\cdot g^{-1}) = f(e_G) = \varepsilon(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\circ(id\otimes S)\circ\Delta = \eta\circ\varepsilon$$

Второе свойство проверяется аналогично.

$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(f) = \sum_i \varepsilon(\phi_i')\otimes\phi_i'' =$$

$$= \sum_i \phi_i'(e_G)\otimes\phi_i''$$

Поэтому для $\forall g\in G$:

$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(f)(g) = \sum_i \phi_i'(e_G)\,\phi_i''(g) =$$

$$= f(e_G\cdot g) = f(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(f) = f \quad \forall f\in\mathcal{F}(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = id.$$

Упражнение*

Проверьте свойства (для $\mathcal{F}(G)$)

(i) $(S \otimes S) \circ \Delta = \mu \circ \Delta \circ S$

(ii) $\varepsilon \circ S = \varepsilon$