21.03.2017 С/к R-матрица =1=

Лекция № 10

Дуальные алгебры Хопфа

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей. Двойственное пространство $\mathcal{A}^*$ не обладает, вообще говоря, структурой алгебры: нет умножения линейных функционалов.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Поточечное умножение не годится: если ξ и $\eta \in \mathcal{A}^*$, то, определив $(\xi \cdot \eta)(a) = \xi(a)\eta(a)$ $\forall a \in \mathcal{A}$, мы получим нелинейную функцию на $\mathcal{A}$, то есть так определённое умножение выводит из $\mathcal{A}^*$.

Однако, имея алгебраическую структуру в $\mathcal{A}$, пространство $\mathcal{A}^*$ легко превратить в ко-алгебру. Мы рассмотрим случай, когда $\mathcal{A}$ - алгебра Хопфа. Тогда $\mathcal{A}^*$ тоже становится алгеброй Хопфа.

Итак, у нас <u>заданы</u>:

(i) Линейное пространство $\mathcal{A}$ и ассоциативная билинейная операция умножения $m: \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, относительно которой имеется единичный элемент e: $m(e,a) = m(a,e) = a$ $\forall a \in \mathcal{A}$.

Напомним, что это равносильно существованию гомоморфизма

$\eta: \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ (вложение поля $\mathbb{C}$ в алгебру $\mathcal{A}$).

(ii) Структура коалгебры

$\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ — коассоциативный гомоморфизм алгебр;

$\varepsilon: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ — гомоморфизм $\mathcal{A}$ в поле $\mathbb{C}$ (ко-единица)

(iii) <u>Анти</u>гомоморфизм $S: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (отображение антипода)

(iv) Линейное пространство $\mathcal{A}^*$ и <u>невырожденная</u> билинейная форма

$\langle\, , \rangle: \mathcal{A}^*\otimes\mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

Нам необходимо построить: отображения m^*, e^*, Δ^*, ε^* и S^* на пространстве $\mathcal{A}^*$ с соответствующими свойствами.

Дальше греческие буквы $\xi, \zeta, \eta \ldots$ будут обозначать элементы $\mathcal{A}^*$, а латинские буквы $a, b, c \ldots$ — элементы $\mathcal{A}$.

(i*) Структура ассоциативной алгебры с единицей на $\mathcal{A}^*$:

— Умножение m^*: $\forall$ ξ и η функционал $m(\xi, \eta) \in \mathcal{A}^*$ определяется так:

$$\langle m^*(\xi, \eta), a \rangle := \langle \xi \otimes \eta, \Delta(a) \rangle :=$$
$$= \langle \xi, a_{(1)} \rangle \langle \eta, a_{(2)} \rangle \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Здесь $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ — коумножение в $\mathcal{A}$.

— Единичный функционал e^*:

$$\langle e^*, a \rangle := \varepsilon(a) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

(ii*) Структура ко-алгебры в A^*:

— Ко-умножение Δ^*: $\Delta^*(\xi) \in A^* \otimes A^*$, где по-определению:

$$\langle \Delta^*(\xi), a \otimes b \rangle := \langle \xi, m(a,b) \rangle.$$

— Ко-единица ε^*:

$$\varepsilon^*(\xi) = \langle \xi, e \rangle \quad \forall \xi \in A^*.$$

(iii) Отображение антипода $S^*: A^* \to A^*$:

$$\langle S^*(\xi), a \rangle := \langle \xi, S(a) \rangle \quad \forall \xi \text{ и } a.$$

Эти определения нуждаются в проверке корректности. То есть, необходимо убедиться в ассоциативности m^*, ко-ассоциативности Δ^* и выполнение всех аксиом, связывающих m^*, e^*, Δ^*, ε^* и S^*.

Ассоциативность m^* следует из ко-ассоциативности Δ. Линейность $m^*(\xi, \eta)$ как функционала очевидна из линейности Δ.

Действительно для $\forall a \in \mathcal{A}$ имеем цепочку равенств:

$$\langle m^*(\xi, m^*(\zeta,\eta)), a \rangle := \langle \xi, a_{(1)} \rangle \langle m^*(\zeta,\eta), a_{(2)} \rangle =$$

$$= \langle \xi, a_{(1)} \rangle \langle \zeta \otimes \eta, \Delta(a_{(2)}) \rangle \equiv$$

$$\equiv \langle \xi \otimes \zeta \otimes \eta, \underline{(id \otimes \Delta) \circ \Delta}(a) \rangle =$$

$$= \langle \xi \otimes \zeta \otimes \eta, (\Delta \otimes id) \circ \Delta(a) \rangle \equiv$$

$$\equiv \langle m^*(m^*(\xi, \zeta), \eta), a \rangle$$

Таким образом, линейные функционалы $m^*(\xi, m^*(\zeta,\eta))$ и $m^*(m^*(\xi,\zeta),\eta)$ принимают <u>одинаковые</u> значения на $\forall a \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ ~~эти~~ совпадают.

Билинейность $m^*(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2, \zeta) =$

$= \alpha_1 m^*(\xi_1, \zeta) + \alpha_2 m^*(\xi_2, \zeta)$ и

$m^*(\xi, \alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2) = \alpha_1 m^*(\xi, \zeta_1) + \alpha_2 m^*(\xi, \zeta_2)$ –

– очевидна.

Аналогичным образом проверяется ко-ассоциативность Δ^*.

Взаимодействие с коединицей:

$$\langle (\varepsilon^*\otimes id)\circ\Delta(\xi), a\rangle = \langle \underline{\varepsilon^*(\xi_{(1)})}\,\xi_{(2)}, a\rangle =$$

$$= \langle \xi_{(1)}, e\rangle\langle \xi_{(2)}, a\rangle = \langle \Delta^*(\xi), e\otimes a\rangle =$$

$$= \langle \xi, m(e,a)\rangle = \langle \xi, a\rangle \quad \forall\, \xi \text{ и } a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varepsilon^*\otimes id)\circ\Delta = id$$

Единичность функционала e^*:

$$\langle m^*(e^*, \xi), a\rangle := \langle e^*\otimes\xi, \Delta(a)\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle e^*, a_{(1)}\rangle}_{=\varepsilon(a_{(1)})}\langle \xi, a_{(2)}\rangle = \langle \xi, \underbrace{\varepsilon(a_{(1)})\,a_{(2)}}_{=a}\rangle =$$

$$= \langle \xi, a\rangle \quad \forall\, \xi \text{ и } a \Rightarrow m^*(e^*, \xi) = \xi.$$

Упражнение *

Проверьте выполнение всех аксиом алгебры Хопфа для введённых выше отображений.

Зам. Для доказательства антигомоморфности S^* необходимо свойство:

$$(S\otimes S)\circ\Delta = P\circ\Delta\circ S$$

P — перестановка в $A\otimes A$.

Приведём доказательство антигомоморфности S^*, учитывая обозначение операции умножения $m^*(\xi,\eta)\to\xi\cdot\eta$.
Итак, надо убедиться, что

$$S^*(\xi\cdot\eta)=S^*(\eta)\cdot S^*(\xi)$$

Для $\forall a\in A$ имеем:

$$\langle \underline{S^*(\xi\cdot\eta)}, a\rangle := \langle \xi\cdot\eta, S(a)\rangle =$$

$$=\langle \xi\otimes\eta, \underline{\Delta\cdot S(a)}\rangle = \langle \xi\otimes\eta, P\circ(S\otimes S)\Delta(a)\rangle =$$

$$=\langle \xi\otimes\eta, S(a_{(2)})\otimes S(a_{(1)})\rangle = \langle S^*(\xi), a_{(2)}\rangle\cdot$$

$$\cdot\langle S^*(\eta), a_{(1)}\rangle := \langle S^*(\eta)\otimes S^*(\xi), \Delta(a)\rangle :=$$

$$=\langle \underline{\underline{S^*(\eta)\cdot S^*(\xi)}}, a\rangle.$$

Как видим, все свойства операций и ко-операций в A^* следуют из свойств ко-операций и операций в A. Эта картина совершенно симметрична. Поэтому A и A^* называют <u>взаимно</u> дуальными алгебрами Хопфа.

$\boxed{\text{Упражнение}^{*}}$ Пусть G — конечная группа, а $\mathbb{C}[G]$ — соответствующая групповая алгебра. Напомним, что операции

$$\Delta(g_i) = g_i \otimes g_i$$

$$\varepsilon(g_i) = 1$$

$$S(g_i) = g_i^{-1}$$

превращают $\mathbb{C}[G]$ в ко-коммутативную алгебру Хопфа. Постройте дуальную алгебру Хопфа $\mathbb{C}^{*}[G]^{*}$ и покажите, что это алгебра функций на G, линейно продолженных на $\mathbb{C}[G]^{*}$ по правилу: $\forall f \in Fun(G) \longleftrightarrow \bar{f} \in Fun(\mathbb{C}[G])$:

$$\bar{f}(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha f(g_1) + \beta f(g_2)$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Введём теперь новое понятие ко-представление (ко-модуля) и ко-действия.

Если задана алгебра $\mathcal{A}$, то её представлением в линейном пространстве V называется гомоморфизм алгебр $T_V : A \to End(V)$, то есть, линейное отображение $\mathcal{A}$ в пространство линейных операторов на V, сохраняющее также мультипликативную структуру $\mathcal{A}$:

$$\forall a \in \mathcal{A} \mapsto \hat{T}(a) : \quad \hat{T}(a \cdot b) = \hat{T}(a) \cdot \hat{T}(b)$$

~~Пространство~~ $\hat{T}(e) = id_V$ – тожд. оператор.

Здесь считается, что операторы $\hat{T}(a)$ действуют на вектора пространства V слева, то есть в произведении $\hat{T}(a) \cdot \hat{T}(b)$ первым применяется оператор $\hat{T}(b)$, а потом $\hat{T}(a)$.

Такое пространство V с операторами $\hat{T}(a)$ называется левым модулем над $\mathcal{A}$ или левым $\mathcal{A}$-модулем.

О Левым A-модулем называется линейное пространство V, вместе с линейным отображением $\rho_l : A\otimes V \to V$ таким, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A\otimes V \arrow[dl, "m\otimes id_V"'] \arrow[dr, "id_A\otimes \rho_l"] & \\
A\otimes V \arrow[dr, "\rho_l"'] & & A\otimes V \arrow[dl, "\rho_l"] \\
 & V &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C\otimes V \arrow[d, phantom, "\cong"] \arrow[r, "\eta\otimes id_V"] & A\otimes V \arrow[dl, "\rho_l"] \\
V &
\end{tikzcd}$$

(Единица алгебры отображается в единичный оператор)

Аналогичным образом определяется правый модуль (там операторы действуют справа, то есть в произведении $\hat{T}(a)\cdot\hat{T}(b)$ первым применяется $\hat{T}(a)$, а потом $\hat{T}(b)$).

$\boxed{O}$ Правый A-модуль это линейное пространство V с линейным отображением $\rho_r : V \otimes A \to V$ таким, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
 & V \otimes A \otimes A \arrow[dl, "id_V \otimes m"'] \arrow[dr, "\rho_r \otimes id_A"] & \\
V \otimes A \arrow[dr, "\rho_r"'] & & V \otimes A \arrow[dl, "\rho_r"] \\
 & V &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes \mathbb{C} \arrow[dr, "id_V \otimes \eta"] \arrow[dd, phantom, "\cong"] & \\
 & V \otimes A \arrow[dl, "\rho_r"] \\
V &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Пример.}}$ Рассмотрим конечномерную ассоциативную алгебру $A = Mat_n(\mathbb{C})$ — алгебру комплексных матриц $n \times n$. Матричные единицы E_{ij} образуют линейный базис в A:

$$\forall a \in Mat_n(\mathbb{C}): \quad a = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} E_{ij}$$

$A = \| A_{ij} \|$ — матрица коэффициентов элемента a относительно базиса E_{ij}.

Структура алгебры:

$$E_{ij} \cdot E_{ks} = \delta_{jk} E_{is}$$

$$e = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$$ — единичный элемент $\mathcal{A}$.

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Рассмотрим дуальное пространство $Mat_n^*(\mathbb{C})$ и зададим базис <u>координатных функций</u> $t_{ij} \in Mat_n^*(\mathbb{C})$ так:

$$\langle t_{ij}, E_{ks} \rangle = \delta_{ik} \delta_{js}. \quad (\star)$$

Теперь $\forall\, a = \sum A_{ij} E_{ij} \in Mat_n(\mathbb{C})$ действие координатных функций дается спариванием:

$$t_{ij}(a) := \langle t_{ij}, a \rangle = \langle t_{ij}, \sum A_{ks} E_{ks} \rangle = A_{ij}$$

$\boxed{У}$ Алгебраическая структура $Mat_n(\mathbb{C})$ и спаривание $(\star)$ превращают $Mat_n^*(\mathbb{C})$ в <u>ко-алгебру</u> с операциями:

— Коумножение

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes t_{kj}$$

— Ко-единица

$$\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$$

$\boxed{\text{Упражнение}^{*}}$ Докажите это утверждение

Аналогом представлений (левых и правых модулей) алгебры являются ко-представления (ко-модули) ко-алгебр.

$\boxed{\text{О}}$ Линейное пространство V называется левым ко-модулем над ко-алгеброй A если задано линейное отображение (кодействие A на V) $\delta_l : V \to A \otimes V$ такое, что следующие диаграммы коммутативны.

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\delta_l"'] \arrow[dr, "\delta_l"] & \\
A \otimes V \arrow[dr, "id_A \otimes \delta_l"'] & & A \otimes V \arrow[dl, "\Delta \otimes id"] \\
 & A \otimes A \otimes V &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\delta_l"] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[dl, "\varepsilon \otimes id_V"] \\
\mathbb{C} \otimes V &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Зам}}$ Эти диаграммы отличаются от диаграмм, определяющих A-модуль, направлением стрелок и заменой операций m и e ко-операциями Δ и ε.

Аналогично определяется <u>правый</u> ко-модуль.

$\boxed{V}$ Если A - алгебра, и A^* - дуальная ко-алгебра, то любой левый A-модуль можно превратить в правый A^*-ко-модуль и наоборот.

Эта связь выглядит следующим образом. Пусть V - комодуль над A^*.
правый

Это означает, что есть отображение $\delta_r : V \to V \otimes A^*$ с известными свойствами.

Нужно задать на V структуру левого модуля над A, то есть, определить левое действие элементов $a \in A$ на векторах V, которое было бы представлением алгебры A.

Положим, по определению:
Если $\forall v \xrightarrow{\delta_r} v_{(1)} \otimes \xi_{(2)}$ (Свидлеровские обозначения), то

$\forall a \in \mathcal{A}: \quad a \triangleright v := v_{(1)} \langle \xi_{(2)}, a \rangle.$

Пользуясь свойствами структур алгебры и ко-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$, а также определениями модуля и ко-модуля, легко показать, что заданное выше действие действительно задаёт представление $\mathcal{A}$, то есть:

$$m(a, b) \triangleright v = a \triangleright (b \triangleright v).$$

$\boxed{\text{Упражнение}^{*}}$ Докажите это свойство.

Мы проиллюстрируем вышесказанное на примере $Mat_n(\mathbb{C})$ и $Mat_n^*(\mathbb{C})$, представленных в n-мерном пространстве V с базисом $\{x_i\}_{1 \le i \le n}$.

$\boxed{V}$ Пространство V является правым ко-модулем над $Mat_n^*(\mathbb{C})$ со следующим кодействием:

$$x_i \longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes t_{ji}$$

На $\forall\, v = x_i v_i$ данное кодействие распространяется по линейности.

Доказательство:

Ко-умножение в $Mat_n^*(\mathbb{C})$ имеет вид $\Delta(t_{ij}) = t_{ik} \otimes t_{kj}$ (Σ по k), ко-единица $\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$. Проверим коммутативность 2х диаграмм из определения правого ко-модуля на уровне базисных векторов x_i:

$$
\begin{tikzcd}
 & x_j \otimes t_{jk} \arrow[r, "\delta_r \otimes id"] & x_s \otimes t_{sj} \otimes t_{jk} \arrow[d, phantom, "|||"] \\
\forall x_k \arrow[ur, "\delta_r"] \arrow[dr, "\delta_r"'] & & x_j \otimes t_{js} \otimes t_{sk} \\
 & x_j \otimes t_{jk} \arrow[ur, "id \otimes \Delta"] &
\end{tikzcd}
$$

$$\forall x_k \xrightarrow{\delta_r} x_j \otimes t_{jk} \xrightarrow{id \otimes \varepsilon} x_j \otimes \delta_{jk} = x_k$$

Итак, все требования на ко-действие выполнены.

Какое действие матричной алгебры $Mat_n(\mathbb{C})$ на V порождается этим ко-действием ко-алгебры $Mat_n^*(\mathbb{C})$?

$\forall\ a = \sum_{ij} A_{ij} E_{ij}$:

$$a \triangleright x_k = x_s \otimes \langle t_{sk}, A_{ij} E_{ij} \rangle = x_s A_{sk}$$

Итак, мы получили стандартное действие линейного оператора с матрицей $\|A_{ij}\|$.

Рассмотрим теперь биалгебру $Fun_{reg}(Mat_n(\mathbb{C}))$ — регулярных функций на матричной алгебре $Mat_n(\mathbb{C})$. Эта биалгебра порождена генераторами $t_{ij} \in Mat_n^*(\mathbb{C})$, снабжёнными поточечным коммутативным умножением:

$$(t_{ij} \cdot t_{ks})(g) = t_{ij}(g)\, t_{ks}(g) \quad \forall g \in Mat_n(\mathbb{C}).$$

и ко-умножением Δ и ко-единицей ε, рассмотренными выше. Ко-действие $Mat_n^*(\mathbb{C})$ на V легко расширяется до ко-действия Fun_{reg} на любой конечной тензорной степени пространства V:

$$V^{\otimes k} \xrightarrow{\delta_c} V^{\otimes k} \otimes Fun_{reg}(Mat_n(\mathbb{C})).$$

На базисных векторах $V^{\otimes k}$ это кодействие выглядит так:

$$x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_k} \xmapsto{\delta_r} x_{a_1}\otimes\ldots\otimes x_{a_k}\otimes t_{a_1 i_1} t_{a_2 i_2}\ldots t_{a_k i_k}$$

Все аксиомы комодуля легко проверяются.
Таким образом, мы вводим структуру правого ко-модуля над $Fun_{reg}(Mat_n(\mathbb{C}))$ в тензорной алгебре

$$\mathbb{T}(V) = \mathbb{C}\oplus V\oplus V^{\otimes 2}\oplus\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$
