Лекция № 12

Наша следующая цель — изучить подробнее структуру алгебры квантовых функций при произвольном значении n, найти аналог квантового детерминанта, рассмотреть вопрос о количестве независимых соотношений, следующих из матричного равенства $R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}$ и так далее.

Прежде всего, ответим на вопрос о R-матрице. Почему в соотношениях на генераторы квантованных функций используется одно из решений уравнения Янга-Бакстера, а не какая-то произвольная $n^2 \times n^2$ матрица?

Чтобы ответ получился более наглядным, перейдём, временно, к несколько другой R-матрице:

$$\hat{R}_{12} := P_{12}R_{12}$$

Зам. Именно такая $\hat{R}$-матрица часто встречается в работах по интегрируемым системам.

Уравнение Янга-Бакстера для R:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

прямо следует из соотношения на R:

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$$

и свойств перестановок P_{12} и P_{23}.

Умножим перестановочные соотношения

$$\check{R}_{12}T_1T_2 = T_1T_2\check{R}_{12}$$ слева на P_{12}:

$$\check{R}_{12}T_1T_2 = P_{12}T_1T_2R_{12} = T_2T_1P_{12}R_{12} = T_2T_1\check{R}_{12} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ В терминах матрицы R получаем

$$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12}$$ –

– более распространённая и известная запись перестановочных соотношений в алгебре квантовых функций.

Рассмотрим теперь произвольный моном третьего порядка по генераторам алгебры

$$t^{i_1}_{j_1}t^{i_2}_{j_2}t^{i_3}_{j_3} \leftrightarrow T_1T_2T_3$$

и приведём его, пользуясь перестановочными соотношениями, к $=3=$ виду $T_3 T_2 T_1$. Это можно проделать 2 разными способами:

1 способ:

$$\underline{T_1 T_2 T_3} = R_{12}^{-1} T_2 T_1 R_{12} T_3 = R_{12}^{-1} T_2 \underline{T_1 T_3} R_{12} =$$

$$= R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} \underline{T_2 T_3} T_1 R_{13} R_{12} = R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1} T_3 T_2 T_1 \cdot R_{23} R_{13} R_{12}$$

2 способ:

$$T_1 \underline{T_2 T_3} = R_{23}^{-1} \underline{T_1 T_3} T_2 R_{23} = R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} T_3 \underline{T_1 T_2} R_{13} R_{23} =$$

$$= R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} R_{12}^{-1} T_3 T_2 T_1 R_{12} R_{13} R_{23}$$

Если окончательные выражения справа в 1м и 2м способе действит не равны друг другу тождественно, то это означает, что в нашей алгебре помимо исходных квадратичных условий возникнут кубические условия и говорить о плоскости такого квантования уже не приходится. Чтобы этого избежать, мы налагаем на R условие

Янга-Бакстера:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

$$\Updownarrow$$

$$R_{23}^{-1}R_{13}^{-1}R_{12}^{-1} = R_{12}^{-1}R_{13}^{-1}R_{23}^{-1},$$

что гарантированно обеспечивает тождественное равенство правых частей рассмотренных выше преобразований выражения $T_1T_2T_3$.

Чтобы увидеть путь обобщения $\det_q T$ на случай произвольной размерности, заметим следующее:

$\boxed{\text{V}}$ В алгебре $Fun_q(Mat_2(\mathbb{C}))$ для R-матрицы Дринфельда $R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ и $D^R = \begin{pmatrix} q^{-3} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$ справедливо тождество:

$$\det_q T = ad - qbc = q^4 Tr_{R(12)}\left[\frac{(q\mathbb{1} - R_{12})}{2_q} T_1T_2\right] =$$

$$= \frac{q^4}{2_q} Tr_{(12)}\left(D_1^R D_2^R (q\mathbb{1} - R_{12}) T_1T_2\right).$$

$$2_q = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} = q + \frac{1}{q}$$

Упражнение $\boxed{*}$ Докажите это равенство.

Рассмотрим подробнее выражение $A^{(2)}_{12} = \frac{1}{2_q}(q\mathbb{1} - R_{12})$

Это квантовый аналог антисимметризатора в пространстве $V^{\otimes 2}$:

$$A^{(2)} \xrightarrow[q \to 1]{} \frac{\mathbb{1} - P_{12}}{2}$$

$A^{(2)}$ является ~~идемпотентом~~ проектором ранга 1: $A^{(2)2} = \frac{1}{2_q^2}(q^2 - 2q\cdot R + R^2) =$

применяем условие Гекке

$$= \frac{1}{2_q^2}\left(q^2 - 2q\cdot R + 1 + (q - 1/q)R\right) =$$

$$= \frac{1}{2_q^2}\left(q\cdot 2_q - \underbrace{(q + \tfrac{1}{q})}_{= 2_q} R\right) = \frac{q - R}{2_q} = A^{(2)}$$

Матрица $A^{(2)}$ имеет вид:

$$A^{(2)} = \frac{1}{2_q}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Tr}_{(12)} A^{(2)} = 1 \Rightarrow \operatorname{rank} A^{(2)} = 1$ т.к. для проекционного оператора его след совпадает с рангом.

$\boxed{\text{Упражнение} \; \boxed{*}}$ Докажите это утверждение.

Впрочем, на этом простом примере убедиться в том, что $\operatorname{rank} A^{(2)} = 1$ можно и непосредственно из вида матрицы $A^{(2)}$.

Заметим, что единичность ранга позволяет представить матрицу $A^{(2)}$ в виде произведения 2х ~~строк~~ одномерных матриц: столбца u^{ij} и строки v_{ij}:

$$A^{(2)}{}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = u^{i_1 i_2} v_{j_1 j_2}$$

где $\sum\limits_{i,j=1}^{2} u^{ij} v_{ij} = 1$ в силу $\mathrm{Tr}_{(12)} A^{(2)}_{12} = 1$.

Явный вид u и v определяется с точностью до произвольной ненулевой константы α:

$$\|u^{ij}\| = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix} \quad \|v_{ij}\| = \frac{1}{\alpha 2_q} \left(0, \frac{1}{q}, -1, 0\right)$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Напомним наше правило лексикографической нумерации:

$$u^{11} = 0 \quad u^{12} = \alpha \cdot 1 \quad u^{21} = -\alpha q \quad u^{22} = 0.$$

Для произвольного размера m матрица Дринфельда-Джимбо:

$$R = q\sum_{i=1}^{m} E^i_i \otimes E^i_i + \sum_{i\neq j} E^i_j \otimes E^j_i + \lambda \sum_{i<j} E^i_i \otimes E^j_j$$

Из условия $Tr_{(2)} R_{12} D^R_2 = 1$ легко найти матрицу D^R. Полагая $D^R = \sum_{ab} E^a_b D^a_b$ и подставляя это в получим:

$$D^a_b = 0 \quad a \neq b$$

$$D^a_a = q^{-2(m-a)-1}$$

Таким образом:

$$D^R = \sum_{a=1}^{m} q^{-2(m-a)-1} E^a_a = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{q^{2m-1}}, \frac{1}{q^{2m-3}}, \ldots, \frac{1}{q}\right)$$

R-след единицы:

$$\boxed{Tr_R\, \mathbb{1}_{m\times m} = Tr\, D^R = \sum_{a=1}^{m} q^{-2(m-a)-1} = \frac{m_q}{q^m}}$$

$$m_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} = q^{-(m-1)} + q^{-(m-3)} + \ldots + q^{m-3} + q^{m-1}.$$

При рассмотрении R-матричных представлений алгебры Гекке мы построим образы идемпотентов в алгебры Гекке, нумеруемых таблицами Юнга. Нас будут интересовать идемпотенты $A^{(k)}$, отвечающие столбцовым диаграммам: $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \vdots \\ \hline k \\ \hline\end{array} \leftrightarrow A^{(k)}$.

$$A^{(k)}(y_1, y_2, \dots, y_k) = A^{(k-1)}(y_1, \dots, y_{k-1}) \frac{(y_k - q^2)}{(q^{2(k-1)} - q^2)}$$

Здесь $\left.\begin{array}{l} y_k = g_{k-1} y_{k-1} g_{k-1} \quad k \geq 2 \\ y_1 = 1 \end{array}\right\}$ – элементы

Юциса–Мерфи, а g_i – генераторы алгебры

Гекке $H_k(q)$: $\quad g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$

$$g_i^2 = 1 + \lambda g_i$$

Элементы Юциса–Мерфи коммутируют друг с другом.

Докажем важное утверждение:

$\boxed{\text{У}}$ $\quad A^{(k)} = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)} \left(q^{k-1} - (k-1)_q\, g_{k-1}\right) A^{(k-1)}$

<u>Доказательство:</u>

Напомним характеристическое свойство идемпотентов $A^{(k)}$:

$$A^{(k)} g_i = g_i A^{(k)} = -\frac{1}{q} A^{(k)} \quad 1 \leq \forall i \leq k-1$$

$$A^{(k)} \cdot A^{(k)} = A^{(k)}.$$

Запишем элемент y_k в виде суммы слагаемых

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = g_1^2 = 1 + \lambda g_1$$

$$y_3 = g_2 g_1^2 g_2 = 1 + \lambda g_2 + \lambda \underline{g_2 g_1 g_2} =$$

$$= 1 + \lambda g_2 + \lambda g_1 g_2 g_1$$

$$y_k = 1 + \lambda g_{k-1} + \lambda g_{k-1} g_{k-2} g_{k-1} + \dots +$$

$$+ \lambda g_{k-1} \cdots g_2 g_1 g_2 \cdots g_{k-1} =$$ { пользуемся соотношениями из группы кос: $g_{i+1} g_i g_{i+1} = g_i g_{i+1} g_i$ } =

$$= 1 + \lambda g_{k-1} + \lambda g_{k-2} g_{k-1} g_{k-2} + \dots +$$

$$+ \lambda g_1 g_2 \cdots g_{k-2} g_{k-1} g_{k-2} \cdots g_2 g_1 .$$

$$A^{(k)} = A^{(k-1)} \frac{(y_k - q^2)}{q^{-2(k-1)} - q^2} =$$ { $A^{(k-1)} = A^{(k-1)} \cdot A^{(k-1)}$, и $A^{(k-1)}$ $\underline{\text{коммутирует с } y_k}$, т.к. A^{k-1} построен из элементов Юнса-Мерфи } =

$$= A^{(k-1)} \frac{(y_k - q^2)}{q^{-2(k-1)} - q^2} A^{(k-1)} =$$ { Подставляем разложение y_k в сумму слагаемых и пользуемся свойством

$$A^{(k-1)} g_s g_{s+1} \cdots g_{k-1} \cdots g_{s+1} g_s A^{(k)} =$$

$$= q^{-2(k-1-s)} A^{(k-1)} g_{k-1} A^{(k-1)}$$ } =

$$= A^{(k-1)} \frac{\left(1-q^2+\lambda\left(1+\frac{1}{q^2}+\dots+\frac{1}{q^{2(k-2)}}\right)g_{k-1}\right)}{q^{-2(k-1)}-q^2} A^{(k-1)} =$$

$$= A^{(k-1)} \frac{\left(-q\lambda+\lambda q^{-(k-2)}(k-1)_q\, g_{k-1}\right)}{q^{2-k}\left(q^{-k}-q^{k}\right)} A^{(k-1)} =$$

$$= A^{(k-1)} \frac{\cancel{\lambda q^{2-k}}\left(q^{k-1}-(k-1)_q\, g_{k-1}\right)}{\cancel{q^{2-k}}\left(q^{k}-q^{-k}\right)} A^{(k-1)} =$$

$$= \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}\left(q^{k-1}-(k-1)_q\, g_{k-1}\right)A^{(k-1)}. \qquad \blacksquare$$

В только что доказанном утверждении идемпотенты $A^{(k-1)}$ зависят только от $g_1, g_2, \dots, g_{k-2}$;

$$A^{(k)}(g_1,\dots,g_{k-1}) = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}(g_1,\dots,g_{k-2})\left(q^{k-1}-(k-1)_q\, g_{k-1}\right)\cdot A^{(k-1)}(g_1,\dots,g_{k-2})$$

Воспользуемся тем, что в $H_k(q)$ максимальный элемент $w_k = g_1(g_2 g_1)\dots(g_{k-1}\dots g_2 g_1)$ осуществляет внутренний автоморфизм:

$$g_i w_k = w_k g_{k-i} \qquad \underline{1 \le i \le k-1}.$$

Пользуясь w_k можно получить разложение вида:

$$A^{(k)} = \frac{1}{k_q} A^{(k)}(\underline{g_2},\dots,g_{k-1})\left(q^{k-1}-(k-1)_q\, g_1\right)A^{(k)}(\underline{g_2},\dots,g_{k-1})$$

В R-матричном представлении $H_k(q)$ в $V^{\otimes k}$

$$g_i \longmapsto R_{i\,i+1} \equiv R_i$$

Сократим запись.

Тогда наши формулы примут вид:

$$A^{(k)}_{12\ldots k}(R_1, \ldots, R_{k-1}) = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}_{1\ldots k-1}\left(q^{k-1}1 - (k-1)_q R_{k-1}\right) \cdot A^{(k-1)}_{1\ldots k-1}$$

$$A^{(k)}_{1\ldots k} = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}_{\underline{2}\ldots k}\left(q^{k-1}1 - (k-1)_q R_1\right) A^{(k-1)}_{\underline{2}\ldots k}.$$

Найдём теперь ранги этих проекторов. Эти ранги равны следам от $A^{(k)}$, взятых во всех пространствах. Однако вычислять след достаточно сложно даже для R-матрицы Дринфельда-Джимбо, не говоря уже о других Гекковских R-матрицах. Мы поступим по-другому. Давайте вычислим R-след от $A^{(k)}$.

$$Tr_{R(1\ldots k)} A^{(k)} \equiv Tr_{(1\ldots k)} D^R_1 D^R_2 \ldots D^R_k A^{(k)}_{1\ldots k}$$

По определению, R-след есть обычный след но от матрицы $D^R_1 \ldots D^R_k A^{(k)}_{1\ldots k} = \tilde{A}^{(k)}_{1\ldots k}$

Поскольку матрицы D^R_ξ — <u>невырождена</u>, то $\operatorname{rank} \tilde{A}^{(k)} = \operatorname{rank} A^{(k)}$.

Кроме того, матричные элементы $A^{(k)}$ – рациональные функции q, в пределе $q \to 1$ переходящие в матричные элементы обычного антисимметризатора в пространстве $V^{\otimes k}$. Это означает, что ранг $A^{(k)}$ (по крайней мере вблизи $q=1$) не зависит от q (ранг с одной стороны – рациональная функция q, не имеющая полюса в $q=1$, а с другой стороны – эта рациональная функция принимает дискретные значения, так как ранг – натуральное число. $\Rightarrow$ такая функция постоянна).

Матрица $\tilde{A}^{(k)}$ уже не проектор и её след не равен её рангу, он зависит от q. Но, поскольку $D^k \to \mathbb{1}$ при $q \to 1$, то след $\tilde{A}^{(k)}$ (он же – R след $A^{(k)}$) при $q \to 1$ стремится к следу классического антисимметризатора и, следовательно, в этом пределе равен ранг $A^{(k)}$.

Для вычисления следов воспользуемся рекуррентной формулой $A^{(k)}$, которую мы доказали в последнем Утверждении (на стр. =8=).

Итак, рассмотрим $Tr_{R(1\ldots k)} A^{(k)}_{1\ldots k}$, $1 \le k \le m$.

Будем вычислять следы последовательно, начиная с k-го пространства, т.к.

$$Tr_{R(1\ldots k)} A^{(k)}_{1\ldots k} = Tr_{R(1\ldots k-1)} \left(Tr_{R(k)} A^{(k)}_{1\ldots k} \right)$$

$$A^{(k)} = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}_{1\ldots k-1} \left(q^{k-1} \mathbb{1} - (k-1)_q R_{k-1,k} \right) A^{(k-1)}_{1\ldots k}.$$

Индекс k-го пространства ~~есть~~ есть только у $\mathbb{1}$ и R_{k-1} в линейной скобке.

$$Tr_{R(k)} \left(q^{k-1} \mathbb{1} - (k-1)_q R_{k-1} \right) =$$

$$= q^{k-1} \frac{m_q}{q^m} \mathbb{1}_{1\ldots k-1} - (k-1)_q \mathbb{1}_{1\ldots k-1} =$$

$$= \frac{1}{q^m} (m-k+1)_q \mathbb{1}_{1\ldots k-1}$$

Здесь мы воспользовались полезным тождеством

$$\boxed{q^{\pm a} b_q \mp q^b a_q = (b \mp a)_q}$$

$\boxed{\text{Упражнение}}$ Докажите это тождество

Таким образом:

$$Tr_{R(k)} A^{(k)}_{1\ldots k} = \frac{(m-k+1)_q}{q^m k_q} A^{(k-1)}_{1\ldots k-1}.$$

Вычисляя ещё один след,
получим:

$$Tr_{R(k-1\,k)} A^{(k)}_{1\ldots k} = \frac{(m-k+1)_q (m-k+2)_q}{q^{2m} k_q (k-1)_q} A^{(k-2)}_{1\ldots k-2}$$

Дальнейшая процедура очевидна, приведём лишь ответ:

$$Tr_{R(1\ldots k)} A^{(k)}_{1\ldots k} = \frac{m_q (m-1)_q \ldots (m-k+1)_q}{q^{km} k_q!} = \frac{m_q!}{q^{km} k_q! (m-k)_q!}$$

Здесь $p_q! := 1_q \cdot 2_q \cdot 3_q \cdot \ldots \cdot p_q$.

Бином. коэффиц.

То есть, $\operatorname{rank} A^{(k)} = \lim\limits_{q\to 1} \frac{m_q!}{q^{km} k_q! (m-k)_q!} = \binom{m}{k}$ — такой же, как у классического антисимметризатора.

В частности,

$$Tr_{R(1\ldots m)} A^{(m)}_{1\ldots m} = \frac{1}{q^{m^2}}$$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rank} A^{(m)} = 1}$

Отметим, что $A^{(m+1)}$ и все дальнейшие проекторы тождественно $= 0$.

Действительно:

$$A^{(m+1)} = \frac{1}{(m+1)_q} A^{(m)} \left(q^m \mathbb{1} - m_q R_m \right) A^{(m)}$$

$$Tr_{R(m+1)} \left(q^m \mathbb{1} - m_q R_m \right) = \left(q^m \frac{m_q}{q^m} - m_q \right) \mathbb{1} \equiv 0.$$

$\Rightarrow Tr_{R(1\dots m+1)} A^{(m+1)} = 0 \Rightarrow A^{m+1} \equiv 0$, так как у $A^{(m+1)}$ собственные значения только 0 или 1 и $A^{(m+1)}$, как и всякий проектор, имеет диагонализуемую матрицу (то есть, не содержит нетривиальных Жордановых клеток).

Тот факт, что самый старший проектор $A^{(m)}$ (будем называть их ___q-антисимметризаторами___, поскольку их ранги такие же, как и у классических антисимметризаторов) имеет ранг 1, позволяет его матрицу записать в виде произведения столбца и строки (как в нашем примере $m=2$)

$$A^{(m)\, i_1 \dots i_m}_{\quad j_1 \dots j_m} = u^{i_1 \dots i_m} v_{j_1 \dots j_m}.$$

Поскольку ранк $A^{(m)} = \underset{\text{обычный след}}{Tr_{(1\ldots m)}} A^{(m)} = 1$,

то $\sum\limits_{i_1\ldots i_m=1}^{m} u^{i_1\ldots i_m} v_{i_1\ldots i_m} = 1$

$\qquad \parallel$

$Tr_{(1\ldots m)} A^{(m)}$

$\boxed{\text{У}}$ Имеют место следующие равенства:

$$\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{m} (D^k)^{i_1}{}_{j_1} \ldots (D^k)^{i_m}{}_{j_m} u^{j_1\ldots j_m} = q^{-m^2} u^{i_1\ldots i_m}$$

$$\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{m} v_{j_1\ldots j_m} (D^k)^{j_1}{}_{i_1} \ldots (D^k)^{j_m}{}_{i_m} = q^{-m^2} v_{i_1\ldots i_m}.$$

Или, если ввести обозначение для матрицы строки v и матрицы столбца u: $u^{i_1\ldots i_m} = u_{|1\ldots m\rangle}$

$$v_{i_1\ldots i_m} = v_{\langle 1\ldots m|}$$

(Это обозначение подчёркивает, что $u_{|\rangle}$ сворачивается с матрицами стоящими слева от неё, а $v_{\langle|}$ – с матрицами справа от нее), то можно записать:

$$D_1^k \ldots D_m^k \, u_{|1\ldots m\rangle} = q^{-m^2} u_{|1\ldots m\rangle}$$

$$v_{\langle 1\ldots m|} D_1^k \ldots D_m^k = q^{-m^2} v_{\langle 1\ldots m|}$$

Доказательство:

В силу свойства D-матриц:

$$R_i D_i^R D_{i+1}^R = D_i^R D_{i+1}^R R_i \quad \forall i$$

и того факта, что $A^{(m)}$ — полином от $R_1, \dots, R_{m-1}$, имеем такое равенство:

$$D_1^R \dots D_m^R A^{(m)}_{1\dots m}(R_1,\dots,R_{m-1}) =$$

$$= A^{(m)}_{1\dots m}(R_1,\dots,R_{m-1}) D_1^R \dots D_m^R .$$

Воспользуемся тем, что $A^{(m)}$ — проектор, то есть $A^{(m)} \cdot A^{(m)} = A^{(m)}$.

Теперь: $A^{(m)} D_1^R \dots D_m^R = A^{(m)} \cdot A^{(m)} D_1^R \dots D_m^R =$

$$= A^{(m)} D_1^R \dots D_m^R A^{(m)}$$

Матрица $A^{(m)}$ выражается через $u_{|\,\rangle}$ и $v_{\langle\,|}$: $A^{(m)} = u_{|1\dots m\rangle} v_{\langle 1\dots m|}$

Поэтому:

$$A^{(m)} D_1^R \dots D_m^R A^{(m)} = u_{|1\dots m\rangle} \underbrace{v_{\langle 1\dots m|} D_1^R \dots D_m^R u_{|1\dots m\rangle}} \cdot v_{\langle 1\dots m|}$$

$\hookrightarrow$ это в точности $\mathrm{Tr}_{R(1\dots m)} A^{(m)}$!

Действительно:

$$\mathrm{Tr}_{k(1\ldots m)} A^{(m)} := \sum_{a_1\ldots a_m=1}^{m} \sum_{b_1\ldots b_m=1}^{m} (D^k)^{a_1}{}_{b_1}\ldots(D^k)^{a_m}{}_{b_m} A^{(m)\,b_1\ldots b_m}{}_{a_1\ldots a_m} =$$

$$= \sum_{\{a\}}^{m} \sum_{\{b\}}^{m} (D^k)^{a_1}{}_{b_1}\ldots(D^k)^{a_m}{}_{b_m} u^{b_1\ldots b_m} v_{a_1\ldots a_m} =$$

$$= \sum_{\{a\}}^{m} \sum_{\{b\}}^{m} v_{a_1\ldots a_m}(D^k)^{a_1}{}_{b_1}\ldots(D^k)^{a_m}{}_{b_m} u^{b_1\ldots b_m} :=$$

$$:= v_{\langle 1\ldots m|} D^k_1 \ldots D^k_m u_{|1\ldots m\rangle}.$$

Левая часть: $A^{(m)} D^k_1 \ldots D^k_1 = u_{|1\ldots m\rangle} \cdot v_{\langle 1\ldots m|} D^k_1 \ldots D^k_m$

Учитывая $\mathrm{Tr}_{k(1\ldots m)} A^{(m)} = q^{-m^2}$,

получаем

$$u_{|1\ldots m\rangle} v_{\langle 1\ldots m|} D^k_1 \ldots D^k_m = q^{-m^2} u_{|1\ldots m\rangle} v_{\langle 1\ldots m|}$$

Свернём это матричное равенство слева с $v_{\langle 1\ldots m|}$ и воспользуемся нормировкой, следующей из условия $A^{(m)2} = 1$: $v_{\langle 1\ldots m|} u_{|1\ldots m\rangle} = 1$:

$$\underbrace{v_{\langle 1\ldots m|} u_{|1\ldots m\rangle}}_{=1} v_{\langle 1\ldots m|} D^k_1 \ldots D^k_m =$$

$$= q^{-m^2} \underbrace{v_{\langle 1\ldots m|} u_{|1\ldots m\rangle}}_{=1} v_{\langle 1\ldots m|}$$

Отсюда получаем одно из доказываемых равенств:

$$v_{\langle 1\ldots m\rangle} D_1^R \ldots D_m^R = q^{-m^2} v_{\langle 1\ldots m\rangle}$$

Другое равенство получается совершенно такими же рассуждениями из соотношения:

$$D_1^R \ldots D_m^R A^{(m)} = A^{(m)} D_1^R \ldots D_m^R A^{(m)} \quad \blacksquare$$