Лекция № 11

На прошлой лекции мы построили ко-действие алгебры регулярных функций $Fun_{reg}(Mat_n(\mathbb{C}))$ на свободной тензорной алгебре $\mathbb{T}(V)$ n-мерного линейного пространства V. Зафиксировав базис $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ в V мы получим такое кодействие на базисных элементах $V^{\otimes k}$:

$$x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_k}\longmapsto x_{a_1}\otimes\ldots\otimes x_{a_k}\otimes t_{a_1 i_1}\ldots t_{a_k i_k}$$

Пусть теперь мы хотим подчинить образующие x_i некоторым перестановочным соотношениям и перейти от $\mathbb{T}(V)$ к фактор-алгебре по соответствующему двустороннему идеалу. Как должны измениться перестановочные соотношения элементов t_{ij} (структура алгебры), чтобы ко-действие можно было бы ограничить на фактор-алгебру?

Другими словами, какие условия на t_{ij} налагаются требованием, чтобы кодействие сохраняло алгебраическую структуру на X_i? Поясним на простом примере, откуда возникают эти условия на t_{ij}.

Пусть мы хотим перейти от $\mathbb{T}(V)$ к коммутативной алгебре полиномов от n коммутирующих переменных x_i. Обозначим эту алгебру $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Имеет место изоморфизм:

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \cong \frac{\mathbb{T}(V)}{\langle x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i \rangle_{1 \le i < j \le n}}.$$

Здесь в знаменателе факторизации стоит двухсторонний идеал в $\mathbb{T}(V)$, порожденный набором векторов

$$Y = \{ x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i \mid 1 \le i < j \le n \}.$$

Таким образом, в фактор-алгебре возникают соотношения вида $x_i x_j - x_j x_i = 0$ и т.п. Чтобы наше кодействие

не разрушало эти соотношения, =3=
необходимо и достаточно, чтобы
образ векторов из Y, полученный
кодействием, отправлялся бы в 0
в процессе факторизации. Отсюда
возникают требования на алгебру t_{ij}.

Действительно, мы имеем:

$$\left.\begin{array}{l} x_i \otimes x_j \xmapsto{\delta_r} x_a \otimes x_b \otimes t_{ai} t_{bj} \\ x_j \otimes x_i \xmapsto{\delta_r} x_b \otimes x_a \otimes t_{bj} t_{ai} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i) \xmapsto{\delta_r}$$

$$(x_a \otimes x_b - \underline{x_b \otimes x_a) \otimes t_{ai} t_{bj}} +$$

$$+ \underline{x_b \otimes x_a \otimes (t_{ai} t_{bj}} - t_{bj} t_{ai})$$

Здесь мы тождественно преобразовали
правую часть добавив и отняв
элемент $x_b \otimes x_a \otimes t_{ai} t_{bj}$ (подчеркнут ✓).

Левая часть $(x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i)$ обращается
в нуль в фактор-алгебре.
Справа же в нуль обращается только

первое слагаемое. Для зануления =4=
второго слагаемого нужно потребовать

$$t_{ai} t_{bj} - t_{bj} t_{ai} = 0 \quad \forall a, b, i, j,$$

то есть, t_{ij} должны коммутировать друг с другом!

Матрицы с нечисловыми матричными элементами и другие обозначения.

Введём удобные матричные обозначения, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем изложении.

Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое линейное пространство (как правило, с дополнительной мультипликативной структурой, например, алгебра). Матрицей размером $n \times n$ с матричными элементами $t^i_j \in \mathcal{T}$ называется объект $T \in Mat_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}$

следующего вида

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} E^i_j \otimes t^i_j = \begin{pmatrix} t^1_1 & t^1_2 & \dots & t^1_n \\ t^2_1 & t^2_2 & \dots & t^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^n_1 & t^n_2 & \dots & t^n_n \end{pmatrix}$$

Здесь E^i_j — матричная единица — матрица $n \times n$ с 1 на пересечении i-й строки и j-го столбца и 0 на всех остальных местах.

$$(E^i{}_j)^a{}_b = \delta^{ai}\delta_{bj}$$

Обратите внимание, что мы слегка изменили обозначения — расположили матричные индексы на разной высоте — это облегчает запись многоиндексных формул. Верхний индекс будет нумеровать строки матрицы, нижний — столбцы.

Нам также будут нужны матрицы из $[Mat_n(\mathbb{C})]^{\otimes m} \otimes \mathcal{T}$. Символ T_k где $1 \le k \le m$ означает матрицу вида:

$$T_k := \underbrace{\mathbb{1}_n \otimes \mathbb{1}_n \otimes \ldots \otimes \mathbb{1}_n}_{(k-1)\ \text{сомножителей}} \otimes \overset{k\text{-е место}}{\overset{\downarrow}{E^i{}_j}} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_n \otimes \ldots \otimes \mathbb{1}_n}_{(m-k)} \otimes t^i{}_j$$

(суммирование по i и j от 1 до n).

Здесь $\mathbb{1}_n$ — единичная $n \times n$ матрица.

Пусть $\hat{Y}$ — линейный оператор в $V^{\otimes 2}$, а Y — его матрица в фиксированном базисе $x_i \otimes x_j \in V^{\otimes 2}$ ($\{x_i\}$ — базис в V):

$$\hat{Y} \triangleright x_i \otimes x_j := \sum_{a,b=1}^{n} x_a \otimes x_b \, Y^{ab}{}_{ij}$$

Здесь уже <u>пара</u> индексов ab нумерует строки, а пара нижних индексов

j нумерует столбцы матрицы $\mathbb{Y}$.

Порядок следования пар – лексикографический: $a_1 b_1 < a_2 b_2 \Leftrightarrow \{a_1 < a_2$ или $a_1 = a_2$, но $b_1 < b_2\}$,

то есть:

$$\{ab\} = \{11, 12, \dots, 1n, 21, 22, \dots, 2n, 31, \dots, nn\}.$$

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} \mathbb{Y}^{11}_{11} \dots \mathbb{Y}^{11}_{1n} \dots \mathbb{Y}^{11}_{2n} \dots \mathbb{Y}^{11}_{nn} \\ \mathbb{Y}^{12}_{11} \dots\dots\dots \mathbb{Y}^{12}_{nn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbb{Y}^{nn}_{11} \dots \mathbb{Y}^{nn}_{1n} \dots\dots \mathbb{Y}^{nn}_{nn} \end{pmatrix} : n^2 \times n^2 \text{ матрица.}$$

Оператор $\hat{Y}$ можно продолжить в $V^{\otimes m}$ $(m \geq 2)$ многими способами.

Символ $\hat{Y}_{ab}$ $1 \leq a < b \leq m$ означает, что $\hat{Y}$ действует в a-м и b-м пространствах тензорного произведения:

$$V^{\otimes m} = V \otimes \dots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ a \text{ место}}}{V} \otimes \dots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ b \text{ место}}}{V} \otimes \dots \otimes V.$$

$$\hat{Y}_{ab} \triangleright x_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{x_{i_a}} \otimes \dots \otimes \underline{x_{i_b}} \otimes \dots \otimes x_{i_m} =$$

$$= x_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{x_{j_a}} \otimes \dots \otimes \underline{x_{j_b}} \otimes \dots \mathbb{Y}^{j_a j_b}_{i_a i_b}$$

Индексы a и b называются индексами (номерами) пространств, где действует $\hat{Y}$.

Соответствующая матрица оператора $\hat{Y}_{ab}$ выглядит так:

$$\mathbb{Y}_{ab} = \underbrace{\mathbb{1}_n \otimes \ldots \otimes \mathbb{1}_n}_{(a-1)} \otimes \underset{\uparrow \atop a\text{-е место}}{E^{i_1}{}_{j^1}} \otimes \mathbb{1}_n \otimes \ldots \otimes \mathbb{1}_n \otimes \underset{\uparrow \atop b\text{-е место}}{E^{i_2}{}_{j^2}} \otimes \mathbb{1}_n \otimes \ldots \cdot \mathbb{Y}^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2}$$

Аналогично можно определить матрицы операторов из $End(V^{\otimes k})$ для $\forall k$, но у нас они не появятся.

<u>Важный пример</u>: матрица оператора перестановки: $\hat{P} \in End(V^{\otimes 2})$:

$$\hat{P} \triangleright (v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1 \quad \text{для } \forall\, v_i \in V.$$

На базисных элементах пространства $V^{\otimes 2}$:

$$\hat{P} \triangleright x_i \otimes x_j = x_j \otimes x_i \Rightarrow \mathbb{P}^{ab}{}_{ij} = \delta^a_j \delta^b_i$$

Поэтому $\mathbb{P} = \| \mathbb{P}^{ab}{}_{ij} \| = \sum\limits_{i,j=1}^{n} E^i{}_j \otimes E^j{}_i$

В пространстве $V^{\otimes 3}$ можно определить $\hat{P}_{12}$, $\hat{P}_{23}$ и $\hat{P}_{13}$. Например,

$$\hat{P}_{13} \triangleright (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{13} = E^i{}_j \otimes \mathbb{1}_n \otimes E^j{}_i \quad \text{и так далее.}$$

Если в матричном выражении встречаются произведения матриц, имеющие одинаковые ~~индексы~~ номера пространств, то в этих пространствах подразумевается суммирование матричных индексов как в обычном произведении матриц.

<u>Примеры</u>: 1° $A_{12}B_{23}$ – матрица $n^3 \times n^3$ (в 3-х пространствах) ⇒ её матричные элементы нумеруются <u>тройками</u> индексов:

$$(A_{12}B_{23})^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} := \sum_{a=1}^{n} A^{i_1 i_2}_{j_1 a} B^{a i_3}_{j_2 j_3}$$

$\boxed{\text{Зам}}$ $A_{12}B_{23}$ может быть и матрицей в б<u>о́льшем</u> числе пространств, чем 3, но остальные индексы – индексы единичной матрицы (символы Кронекера):

$$A_{12}B_{23} \otimes 1\!\!1_n \otimes 1\!\!1_n \ldots \to (A_{12}B_{23})^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} \delta^{i_4}_{j_4} \delta^{i_5}_{j_5} \ldots$$

2° $R_{12}T_1T_2 \to R^{i_1 i_2}_{a_1 a_2} t^{a_1}_{j_1} t^{a_2}_{j_2}$

(суммирование по повторяющимся индексам).

Отметим важное и полезное свойство матрицы оператора перестановки.

$$\mathbb{P}_{ab}\, A_{1\ldots a \ldots b \ldots} = A_{1 \ldots b \ldots a \ldots}\, \mathbb{P}_{ab}$$

$$\mathbb{P}_{ab}\, \mathbb{B}_{b} = \mathbb{B}_{a}\, \mathbb{P}_{ab}$$

Например:

$$\mathbb{P}_{13}\, \mathbb{A}_{1}\, \mathbb{B}_{24}\, \mathbb{C}_{23} = \mathbb{A}_{3}\, \mathbb{B}_{24}\, \mathbb{C}_{21}\, \mathbb{P}_{13}$$

Упражнение Докажите эти свойства.

Вернёмся теперь к кодействию Fun_{q} на $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Запишем условие коммутативности переменных x_i в матричном виде:

$$x_i x_j := x_j x_i \Rightarrow \hat{P}_{12} \triangleright X_1 X_2 = X_2 X_1 := X_1 X_2$$

Зам Здесь наши обозначения не совсем хороши: X_1 можно перепутать с первым базисным вектором. Этой трудности не возникает, когда работа производится с матрицами, а не векторами.

$$\hat{P}_{12} \triangleright X_1 X_2 = \boxed{X_1 X_2 \mathbb{P}_{12} = X_1 X_2}$$ условие коммутативности.

Действительно, восстанавливая индексы, получим:

$$x_a x_b \mathbb{P}^{ab}{}_{ij} = \underline{x_i x_j}$$

Но $\mathbb{P}^{ab}{}_{ij} = \delta^a_j \delta^b_i \Rightarrow x_a x_b \mathbb{P}^{ab}{}_{ij} = \underline{x_j x_i}$

Давайте теперь построим из $\{x_i\}$ <u>некоммутативную</u> алгебру.

Рассмотрим R-матрицу Дринфельда-Джимбо ($n^2 \times n^2$ матрица)

$$R = q \sum_{i=1}^{n} E^i{}_i \otimes E^i{}_i + \sum_{i \neq j} E^i{}_j \otimes E^j{}_i + \lambda \sum_{i<j} E^i{}_i \otimes E^j{}_j .$$

$$\lambda = q - \frac{1}{q}$$

Эта матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера $R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23}$

и условию Гекке:

$$(R - q \mathbb{1}_{n^2})(R + \tfrac{1}{q} \mathbb{1}_{n^2}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$R^2 = \mathbb{1}_{n^2} + \lambda R .$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Видно, что R является деформацией матрицы перестановки $\mathbb{P}$:

$$\lim_{q \to 1} R = \mathbb{P} .$$

Выберем перестановочные соотношения между x_i в следующем виде:

$$x_a x_b R^{ab}_{ij} = q\, x_i x_j \,, \text{ или}$$

$$x_1 x_2 R_{12} = q\, x_1 x_2$$

(При $q \to 1$ возвращаемся к коммутативной алгебре).

Если мы хотим, чтобы алгебра, генерируемая $\{x_i\}$ не разрушалась кодействием $t^i{}_j$, элементы $t^i{}_j$ не могут оставаться коммутативными. Найдём перестановочные соотношения на $t^i{}_j$:

$$x_a x_b R^{ab}_{ij} = q\, x_i x_j \xrightarrow{\delta_L} \text{(не будем писать } \otimes\text{)}$$

$$\longmapsto x_r x_s t^r{}_a t^s{}_b R^{ab}{}_{ij} = \underline{q\, x_a x_b}\, t^a{}_i t^b{}_j =$$

$$= \underline{x_r x_s R^{rs}{}_{ab}}\, t^a{}_i t^b{}_j \Rightarrow$$

$$\boxed{t^r{}_a t^s{}_b R^{ab}{}_{ij} = R^{rs}{}_{ab}\, t^a{}_i t^b{}_j} \Longleftrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 T_2 R_{12} = R_{12} T_1 T_2}$$

Эти соотношения задают квантованную алгебру функций на матричной алгебре $Mat_n(\mathbb{C})$.

$\boxed{\text{Зам}}$ Почему появилось q в правой части $x_1 x_2 R_{12} = q x_1 x_2$?

Пусть мы выбрали бы такой вариант:

$$x_1 x_2 R_{12} = \alpha x_1 x_2, \text{ где } \alpha \text{ — некоторое число.}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 x_2 (R_{12} - \alpha \mathbb{1}) = 0 \quad (\ast)$$

Если α __не__ является собств. значением R, то матрица $R - \alpha \mathbb{1}$ не вырождена и из $(\ast) \Rightarrow x_i x_j = 0 \ \forall i, j$.

__Наше__ "квантование" — плохое, так как вся алгебра ~~~~ сжалась до линейного пространства $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{x_i\}$ с тривиальным умножением $x_i x_j = 0$.

Итак, α должно быть собств. значением $R \Rightarrow \alpha = q$ или $\alpha = -\frac{1}{q}$.

Для $\alpha = -\frac{1}{q}$: $x_1 x_2 R_{12} = -\frac{1}{q} x_1 x_2$ — так называемая квантованная внешняя алгебра (её классический предел: $x_i x_j = -x_j x_i$).

$\boxed{V}$ Алгебра $T_q(R)$, генерируемая t^i_j с перестановочными соотношениями

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}$$

является би-алгеброй с коумножением Δ и ко-единицей ε вида:

$$\Delta(t^i_j) = t^i_a \otimes t^a_j \Rightarrow \Delta(T_1) = T_1 \otimes T_1$$

$$\varepsilon(t^i_j) = \delta^i_j \Rightarrow \varepsilon(T) = \mathbb{1}_{n\times n}$$

Доказательство:

В нашей алгебре $R_{12}T_1T_2 - T_1T_2R_{12} = 0 \Rightarrow$ результат действия Δ и ε на эту разность тоже должен давать 0.

$$\Delta(R_{12}T_1T_2) = R_{12}\Delta(T_1)\Delta(T_2) = R_{12}(T_1\otimes T_1)(T_2\otimes T_2) =$$

$$= \underline{R_{12}T_1T_2} \otimes T_1T_2 = T_1T_2R_{12} \otimes T_1T_2 = T_1T_2 \otimes \underline{R_{12}T_1T_2} =$$

$$= T_1T_2 \otimes T_1T_2R_{12} = \Delta(T_1T_2R_{12}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta(R_{12}T_1T_2 - T_1T_2R_{12}) = 0$$

$$\varepsilon(R_{12}T_1T_2) = R_{12}\varepsilon(T_1)\varepsilon(T_2) = R_{12}\mathbb{1}_1\cdot\mathbb{1}_2 = \underline{R_{12}}$$

$$\varepsilon(T_1T_2R_{12}) = \underline{R_{12}} \Rightarrow \varepsilon(R_{12}T_1T_2 - T_1T_2R_{12}) = 0.$$

$\blacksquare$

Позже мы приведём аргументы в пользу того, что наше квантование не изменяет размерности однородных компонент алгебры Fun_{reg}, то есть, является <u>плоской деформацией</u> коммутативной алгебры.

Рассмотрим явный пример для <u>$n=2$</u>.

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t^1_1 & t^1_2 \\ t^2_1 & t^2_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} = T \otimes 1 \qquad T_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = 1 \otimes T$$

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix} = T \otimes T.$$

Здесь <u>важно</u> сохранять <u>порядок</u> следования генераторов и не писать, например, cd вместо dc!

$$R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} ab = qba & bc = cb \\ ac = qca & bd = qdb \\ ad - da = \lambda bc & cd = qdc \end{array}}$$

$(\star\star)$

$$\Delta(T_1) = T_1 \otimes T_1 \equiv \begin{pmatrix} \Delta(a) & \Delta(b) \\ \Delta(c) & \Delta(d) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a\otimes a + b\otimes c & a\otimes b + b\otimes d \\ c\otimes a + d\otimes c & c\otimes b + d\otimes d \end{pmatrix}$$

$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1 \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0.$

$\boxed{\text{Зам}}$ Квантованная алгебра функций на $Mat_n(\mathbb{C})$ – пример некоммутативной и не кокоммутативной биалгебры.

Рассмотрим в алгебре $Mat_2(\mathbb{C})$ подмножество матриц с единичным детерминантом: группу $SL(2)$.

В алгебре регулярных функций $Fun_{reg}(Mat_2(\mathbb{C}))$ выделяется подалгебра $Fun_{reg}(SL(2))$ следующим требованием:

т. к. $\forall g \in SL(2)$, $g = \begin{pmatrix} g^1{}_1 & g^1{}_2 \\ g^2{}_1 & g^2{}_2 \end{pmatrix}$

$\det g = g^1{}_1 g^2{}_2 - g^1{}_2 g^2{}_1 = 1$, то

$t^1{}_1 t^2{}_2 - t^1{}_2 t^2{}_1 = 1$ – дополнительное ограничение, вырезающее из всех

функций на $Mat_2(\mathbb{C})$ функции
на группе $SL(2)$.

Математически это выражается в утверждении, что $Fun_{reg}(SL(2))$ изоморфна следующей фактор-алгебре:

$$Fun_{reg}(SL(2)) \cong \frac{Fun_{reg}(Mat_2(\mathbb{C}))}{\langle t^1_1 t^2_2 - t^1_2 t^2_1 - 1 \rangle}$$

Единичная функция.

Какое дополнительное условие возникнет в квантовой алгебре?

$\boxed{V}$ В алгебре ~~Fun_{reg}~~ $Fun_q(Mat_2(\mathbb{C}))$, заданной соотношениями (★★) на стр. $\boxed{=14=}$ на генераторы a, b, c и d

Следующий элемент является центральным (то есть, коммутирует с любым элементом алгебры):

$$\det_q T := ad - qbc = da - \frac{1}{q} bc.$$

$\boxed{\text{Упражнение } \boxed{*}}$ Докажите это утверждение.

В силу центральности квантового детерминанта $\det_q T$, элемент $(\det_q T - 1)$ порождает двухсторонний идеал и фактор-алгебра

единица алгебры

$$\frac{Fun_q(Mat_2(\mathbb{C}))}{\langle \det_q T - 1 \rangle} \cong Fun_q(SL(2))$$

называется квантованной алгеброй функций на группе $SL(2)$.

$\boxed{\text{У}}$ Биалгебра $Fun_q(SL(2))$ становится алгеброй Хопфа, если задать отображение антипода:

$$S(T) \equiv \begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -\frac{1}{q}b \\ -cq & a \end{pmatrix}$$

Отметим, что аксиома антипода

$$m\circ(id\otimes S)\circ\Delta = m\circ(S\otimes id)\circ\Delta = \eta\circ\varepsilon$$

в нашем случае записывается так:

$$m\circ(id\otimes S)\circ\Delta(t^i_j) = m\circ(id\otimes S)(t^i_k\otimes t^k_j) =$$

$$= m(t^i_k, S(t^k_j)) = 1\cdot\varepsilon(t^i_j) = 1\cdot\delta^i_j$$

То есть, фактически $S(T) = T^{-1}$. =18=

Проверим:

$$T \cdot S(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -\frac{1}{q} b \\ -qc & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ad - qbc & -\frac{1}{q} ab + ba \\ cd - qdc & da - \frac{1}{q} cb \end{pmatrix}$$

На диагонали $\uparrow$ вершин $\det_q T$ в 2х эквивалентных формах, вне диагональные элементы равны 0 в силу алгебраических соотношений (☆☆): $ab = qba$ и $cd = qdc$.

Таким образом:

$$T \cdot S(T) = S(T) \cdot T = \begin{pmatrix} \det_q T & 0 \\ 0 & \det_q T \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– как и должно быть для антипода.

Заметим, что

$$S^2(T) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{q^2} b \\ q^2 c & d \end{pmatrix} \neq T.$$

В этом отличие от операции обращения матрицы в коммутативном случае, где всегда $(T^{-1})^{-1} = T$.

В нашем примере легко найти кособратную матрицу ψ:

$$Tr_{(2)} R_{12} \psi_{23} = P_{13}$$

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \to \psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{q^2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/q \end{pmatrix}$$

Матрица $D_1^R = Tr_{(2)} \psi_{12} = \begin{pmatrix} 1/q - \frac{\lambda}{q^2} & 0 \\ 0 & 1/q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q^3} & 0 \\ 0 & 1/q \end{pmatrix}$

— эта матрица отвечает за квантовый след. В частности $Tr_{R(2)} R_{12} = Tr_{(2)} R_{12} D_2^R = \mathbb{1}_1$

$$Tr_R \mathbb{1} = Tr D^R = \frac{2q}{q^2}$$

Для квадрата антипода можно записать тождество:

$$S^2(T) = D^{+1} T D^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^k(T) = D^{+k} T D^{-k}.$$

Если $q^k \neq 1 \ \forall k \in \mathbb{Z}$ (говорят, что q в общем положении), то $D^k \neq \mathbb{1} \ \forall k$. и никакая степень антипода не приведёт к тождественная операции.

$\boxed{\text{Упражнение}^{*}}$ Для алгебры Хопфа $Fun_q(SL(2))$ проверьте выполнение свойств:

(i) $(S \otimes S) \circ \Delta = P \circ \Delta \circ S$

(ii) $\varepsilon \circ S = \varepsilon$