

Испытания Бернулли

Испытаниями Бернулли называется последовательность n независимых случайных величин, каждая из которых принимает два значения: 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Обычно появление 1 называют *успехом*, а 0 — *неудачей*.

Приведём другое определение испытаний Бернулли. Пусть M — множество n -мерных векторов, все координаты которых равны 0 или 1, и для каждого $x \in M$ задана вероятность $P(x) = \prod_{i=1}^n p_i$, где $p_i = p$, если $x_i = 1$, и $p_i = q = 1 - p$, если $x_i = 0$. Элементы множества M назовём испытаниями Бернулли.

Комментарий. Оба определения являются эквивалентными в следующем смысле. Очевидно, что определённые на множестве M случайные величины x_i независимы и каждая из них принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью q . Поэтому каждый вектор $x \in M$ можно рассматривать как множество значений n независимых случайных величин x_i . Случайная величина $X = \sum x_i$ называется *числом успехов*.

11.1. В n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p найдите:

- а) вероятность k успехов;
- б) среднее значение числа успехов;
- в) дисперсию числа успехов;
- г) наиболее вероятное значение числа успехов.

11.2 (закон больших чисел). Пусть X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p . Пусть $t > 0$. Докажите, что

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

УКАЗАНИЕ. Примените неравенство Чебышёва.

Закон больших чисел означает, что при большом числе испытаний вероятность того, что частота успеха сильно отличается от его вероятности, мала. На самом деле этот закон справедлив не только для испытаний Бернулли: если наблюдать много независимых реализаций произвольной случайной величины, то их среднее с большой вероятностью будет мало отличаться от её математического ожидания. Этот закон позволяет, например, проводить социологические исследования, в которых на основе опроса некоторого количества случайно выбранных людей (достаточно большого, но составляющего малую часть всего населения) делаются выводы о распространённости в обществе тех или иных мнений и предпочтений.

11.3. Пассажиру купейного вагона удобно, если все его попутчики одного с ним пола. Какая часть пассажиров испытывает удобства?

11.4. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найдите вероятность того, что среди 6 детей не более 2 девочек.

11.5. Кооператив отгружает железные балки. Средняя длина балки 3 м, дисперсия 0,09 м². Сколько балок надо заказать, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,999, хотя бы 1000 из них имели длину не менее 2 м?

11.6. Найдите среднее число испытаний до первого успеха, если вероятность успеха равна p .

11.7. Проводятся независимые испытания с вероятностью успеха 0,8. Испытания проводятся до первого успеха, но не более четырёх раз. Найдите среднее число испытаний.

11.8 (загадка). Старик ловил неводом рыбу ровно тридцать лет и три года. Каждый день он ловил ровно 7 рыб, которых как раз хватало на ужин. Живущий у старухи кот-долгожитель ест только макрель, которая ловится вдвое реже остальных рыб. В результате он 700 раз оставался голодным. Плавают ли макрель в море косяками или поодиночке?