Математическое ожидание. Дисперсия.

Пусть дано конечное или счётное множество M и для каждого элемента $m \in M$ задано число (вероятность) $P(m) \geq 0$, $\sum\limits_{m \in M} P(m) = 1$. Числовая функция X, заданная на M, называется *случайной величиной.* Множество пар (x_i, p_i), $i = 1, 2, \ldots$, где $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — множество возможных значений случайной величины X, а $p_i = P(\{m \in M \colon X(m) = x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots,$ — соответствующие им вероятности, называется *распределением* случайной величины X.

Комментарий. Как правило, при изучении случайной величины X не требуется знать, на каком множестве она определена. Достаточно знать только её распределение.

Событие $\{m \in M \colon X(m) = x_i\}$ в дальнейшем сокращённо обозначается $X = x_i$.

10.1. Монета подбрасывается 5 раз. Найдите распределение числа выпавших орлов.

Математическим ожиданием или *средним значением* случайной величины X называется сумма

$$E(X) = \sum x_i p_i = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots.$$

Комментарий. Если множество значений случайной величины бесконечно, то это определение нуждается в уточнении. Сумма ряда в правой части называется *математическим ожиданием*, только когда этот ряд сходится абсолютно. В противном случае говорят, что у величины X *не существует математического ожидания.* Например, пусть случайная величина X принимает значение $n \in \mathbb{N}$ с вероятностью $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Тогда ряд $\sum np_n = \sum \frac{1}{n+1}$ расходится, т. е. $E(X)$ не существует. В дальнейшем мы предполагаем, что для всех рассматриваемых случайных величин математические ожидания существуют, т. е. ряд $\sum x_i P(X = x_i)$ сходится абсолютно.

10.2. **а)** Докажите, что математическое ожидание случайной величины X, заданной на множестве M, равно $\sum\limits_{m \in M} X(m)P(m)$.

б) Докажите, что если $E(X) \leq x$, то существует $m \in M \colon X(m) \leq x$.

в) Пусть случайная величина X при всех $m \in M$ принимает одно и то же значение μ: $X(m) = \mu$. Найдите $E(X)$.

г) Докажите *линейность* математического ожидания: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, где a, b — вещественные числа, а X, Y — случайные величины.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события $X = x_i$ и $Y = y_j$ независимы при любых x_i, y_j. Неформально независимость означает, что значения одной из случайных величин не влияют на распределение другой.

10.3. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Дисперсией случайной величины X называется число $D(X) = E(X - E(X))^2$.

Комментарий. Если множество значений случайной величины бесконечно, то дисперсия может не существовать. В дальнейшем предполагается, что для всех рассматриваемых случайных величин дисперсия существует.

10.4. Докажите, что $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

10.5. Докажите, что если X и Y независимы, то $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

10.6 (Неравенство Чебышёва). Докажите, что для любой случайной величины X и любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X)/\varepsilon^2$.

10.7. **а)** Федя знает ответы на 20 из 30 вопросов. В билет входят 3 вопроса. Найдите распределение числа вопросов, на которые Федя сможет ответить.

б) Найдите среднее значение Фединой оценки (если Федя ответит на 3 вопроса, он получит 5, на 2 — 4 и т. д.).

10.8. Две одинаковые колоды карт перетасовываются, и карты последовательно парами выкладываются на стол. Найдите среднее значение числа пар, карты в которых совпадают.

10.9. В распространённой азартной игре игрок может делать ставку на один из номеров от 1 до 6. Бросаются 3 кости, и если выбранный номер выпал хотя бы на одной, то игрок получает свою ставку плюс столько же за каждое появление выбранного номера. Выгодна ли игра для игрока?