Задачи к спецкурсу "Введение в теорию моделей" (2017)

Все модели сигнатуры с равенством считаются нормальными.
Запись ($\boldsymbol{Q}$, $<$) означает ($\boldsymbol{Q}$, $<_Q$), т.е. модель сигнатуры $\{<\}$ на множестве $\boldsymbol{Q}$. И т.п.

Абелева группа без кручения — это абелева группа, в которой всякая нетривиальная циклическая подгруппа бесконечна.

35. Докажите, что класс всех абелевых групп без кручения (в сигнатуре абелевых групп) неэлементарен.

36. Пусть $\mathcal{C}$ -- класс L-структур, (-$\mathcal{C}$) -- его дополнение (до класса всех L-структур). Докажите, что если оба класса $\mathcal{C}$, (-$\mathcal{C}$) Δ-элементарны, то они элементарны.

37. Докажите, что класс всех циклических групп (в сигнатуре с умножением и равенством) не является Δ-элементарным.

38. Докажите, что класс всех конечных линейных порядков четной мощности не финитно элементарен.

39. Докажите, что всякая модель теории DisLO дискретных линейных порядков без наибольшего и наименьшего элемента изоморфна лексикографическому произведению вида $(\mathbf{Z},<) \cdot (A,<)$.

Напомним как задается порядок в произведении $(C,<) \cdot (A,<)$:

$(c,a) < (c',a') \Leftrightarrow a < a'$ или $a = a'$ & $c < c'$.

40. (a) Докажите, что если $(\mathbf{Z},<) \cdot (A,<) \cong (\mathbf{Z},<) \cdot (B,<)$, то $(A,<) \cong (B,<)$.

(b) Докажите, что теория DisLO имеет несчетное множество неизоморфных счетных моделей.

41. Пусть T - расширение теории линейных порядков в сигнатуре $\{<\}$. Докажите, что если T имеет бесконечную модель, то T имеет и модель, в которую вложимо $(\mathbf{Q},<)$.

42. Запишите аксиомы теории конечных линейных порядков в сигнатуре $\{<\}$. Укажите какую-нибудь счетную модель этой теории.

43. Докажите, что если $M \subseteq N \prec P$ и $M \prec P$, то $M \prec N$.

44. Напишите аксиомы теории отношения эквивалентности с бесконечным числом классов. Сколько неизоморфных счетных моделей имеет эта теория? Полна ли она?

45. *Линейно упорядоченной абелевой группой* называется абелева группа с заданным на ней линейным порядком, где выполняется аксиома почленного сложения неравенств.

а) Докажите, что всякую конечно порожденную абелеву группу без кручения можно обогатить до линейно упорядоченной.

Попросту говоря, всякую конечно порожденную абелеву группу без кручения можно линейно упорядочить.

Теория моделей в этой части задачи не нужна.

б) Докажите, что любую абелеву группу без кручения можно обогатить до линейно упорядоченной.

Указание: используйте п. а) и компактность.

46. (Амальгамируемость.) Докажите, что всякую диаграмму элементарных вложений

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M}_2 & \\ \mathbf{M}_0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{M}_1 \end{tikzcd}$$

(где M_0, M_1, M_2 - L-структуры) можно достроить до диаграммы элементарных вложений

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M}_2 \arrow[r] & \mathbf{N} \\ \mathbf{M}_0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{M}_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

для некоторой L-структуры N.

47. Рассмотрим теорию T в сигнатуре с одним 1-местным функциональным символом f и аксиомами:

(1) "f - биекция",

(2_n) $\forall x\ f^n(x) \neq x$.

Для каких кардиналов k эта теория k-категорична?

48. Пусть TF_p – элементарная теория полей характеристики p (в сигнатуре колец).
Докажите, что $TF_0 \subseteq \bigcup_p \bigcap_{q \geq p} TF_q$

49. Пусть L- сигнатура мощности k, M - L-структура мощности m>k. Докажите, что M имеет элементарное расширение N мощности m, такое что $|N \setminus M| = m$.

50. Пусть M, N - модели L-теории T. Докажите эквивалентность следующих утверждений.

(1) Найдется модель T, в которую вложимы M и N.

(2) Если $T \models \varphi \vee \psi$ для универсальных L-предложений φ, ψ, то либо $M \models \varphi$ и $N \models \varphi$, либо $M \models \psi$ и $N \models \psi$.

51. Пусть $T_\exists$ — множество всех экзистенциальных следствий теории T. Докажите, что $M \models T_\exists$, если и только если M элементарно эквивалентна какому-нибудь расширению какой-нибудь модели T.

52. Докажите, что теория экзистенциально аксиоматизируема, если и только если класс ее моделей устойчив относительно расширений.

53. Докажите, что если теория одновременно универсально и экзистенциально аксиоматизируема, то она аксиоматизируема бескванторными формулами (предполагается, что язык содержит логическую константу $\perp$ «ложь»). (Указание: рассмотрите все бескванторные следствия данной теории).

54. Докажите, что если формула логически эквивалентна некоторой универсальной и некоторой экзистенциальной формуле, то она логически эквивалентна бескванторной формуле (предполагается, что язык содержит логическую константу $\perp$ «ложь»).

55. Пусть $M \subseteq N$ - L-структуры, такие что для любых $a_1,\ldots,a_n \in M$ и $b \in N$ найдется автоморфизм N, оставляющий $a_1,\ldots,a_n$ на месте и переводящий b в элемент из M.

Докажите, что $M \prec N$.

56. Пусть K - коммутативное кольцо, $\mathbf{t} \subset \mathbf{u}$ **-** конечные списки различных переменных. Докажите, что $K[\mathbf{t}] \prec K[\mathbf{u}]$.

Определение. Модель M *порождается* своим подмножеством X, если M не имеет собственных подмоделей, содержащих X. M *конечно порождена*, если она порождается своим конечным подмножеством.

57. (Теорема Хенкина о вложении) Если каждая конечно порожденная подмодель модели M вкладывается в какую-нибудь модель теории T, то и M вложима в какую-то модель T.

58. Используя теорему Хенкина, докажите, что всякий частичный порядок на множестве X можно расширить до линейного порядка на X.

Определение. Абелева группа (G,+,0) называется *делимой,* если для любого a и для любого натурального n>0 уравнение nx = a (относительно x) имеет решение в G. (nx обозначает сумму x+...+x из n слагаемых)

59. Докажите, что всякую абелеву группу можно вложить в какую-нибудь делимую.

60. Пусть T — универсально аксиоматизируемая теория сигнатуры L, M — модель сигнатуры L. Докажите, что если каждая конечная подмодель M является моделью T, то и M является моделью T.