Лагранжева механика 7 (2016/2017)

В.А. Побережный

1 Элементарные симметрии

Из явного вида уравнений Эйлера-Лагранжа можно легко получить ряд утверждений о свойствах экстремалей задачи в случаях, когда лагранжиан системы имеет простые вырождения, например, не зависит от каких-либо переменных из $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ или t.

Определение 1 *В задаче о минимизации для функционала действия*

$$S\big[\mathbf{q}(t)\big] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$$

- *величина* $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ *называется (обобщённым) импульсом*
- *величина* $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ *называется (обобщённой) силой*
- *величина* $\dot{\mathbf{q}}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L$ *называется энергией*
- *величина* $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ *называется интегралом движения или первым интегралом системы если на всякой экстремали* $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ *выполняется* $\dfrac{d}{dt} f(\widehat{\mathbf{q}}(t), \dot{\widehat{\mathbf{q}}}(t), t) = 0$.

Предложение 1 *Если лагранжиан не зависит явно от* q_i *(если* i*-ая компонента обобщённой силы равна нулю) то* i*-ая компонента импульса сохраняется (является интегралом движения).*

Смотрим на уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

видим, что доказывать нечего.

Предложение 2 *Если лагранжиан не зависит явно от времени* ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$)*, то энергия сохраняется (является интегралом движения)*

Проверить очень просто. Так как

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

А на решениях уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

то на экстремалях

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

И если лагранжиан не зависит явно от времени, то энергия сохраняется.

В лагранжианы построенные по простым механическим системам время как правило не входит, кинетическая энергия зависит только от скоростей, потенциальная только от координат. Легко проверить, что в таком случае наше определение энергии даёт сумму кинетической и потенциальной энергий, или полную энергию системы. В то же время, указанная выше конструкция позволяет определить понятие энергии и для лагранжианов, не имеющих отношения к механике, например, возникающих в дифференциальной геометрии, или даже просто абстрактных интегральных функционалов на пространствах непрерывно-интегрируемых функций.

Наличие в задаче интегралов движения существенно упрощает исследование, понижая порядок уравнений с которыми приходится иметь дело. Посмотрим как это работает на примере задачи о минимальной поверхности вращения.

2 Минимальные поверхности вращения

Формулировка: *Найти в плоскости O_{xy} кривую соединяющую заданные точки P и Q такую, чтобы боковая поверхность тела образуемого при вращении вокруг O_x была бы минимальной.*

Картинка

Как записать "действие" , то есть площадь боковой поверхности? Известно как:

$$S[y(x)] = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_a^b q\sqrt{1+\dot{q}^2}dt = S[q(t)]$$

(просто поменяли обозначения чтобы было похоже на предыдущие наши формулы) Что будет по Эйлеру-Лагранжу?

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \sqrt{1+\dot{q}^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{q\dot{q}}{\sqrt{1+\dot{q}^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{(\dot{q}\dot{q}+q\ddot{q})\sqrt{1+\dot{q}^2} - q\dot{q}\frac{\dot{q}\ddot{q}}{\sqrt{1+\dot{q}^2}}}{1+\dot{q}^2}$$

и уравнение получается

$$(\dot{q}^2+q\ddot{q})(1+\dot{q}^2) - q\dot{q}^2\ddot{q} = (1+\dot{q}^2)^2$$

довольно страшное, и как решать не очень непонятно. (хотя конечно и решить можно, если помнить стандартный трюк из матанализа, что если где-то в формуле имеется $1+\varphi^2$, или ещё лучше $\sqrt{1+\varphi^2}$, то стоит пробовать замену $\varphi = \operatorname{sh} t$)

Вместо этого попытаемся воспользоваться тем, что лагранжиан не зависит от времени, а значит, энергия должна сохраняться. Что тут будет энергией?

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{q\dot{q}^2}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} - q\sqrt{1+\dot{q}^2} = -\frac{q}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} = const$$

Это условие уже попроще, гиперболические функции ещё виднее. Решаем:

$$\dot{q}^2 = Cq^2 - 1 \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{ch}(\sqrt{C}t - C_0)$$

Получили цепную линию. То есть общий вид экстремали

$$\widehat{q}(t) = \frac{\operatorname{ch}(At+B)}{A}$$

а параметры A, B определяются положением краевых точек P и Q.
Замечание: Рассмотренная задача, несмотря на свою чисто геометрическую формулировку и происхождение имеет очень простую физическую интерпретацию и множество важных обобщений и приложений например, в теоретической физике. Физическая реализация минимальной поверхности устроена очень просто, это форма которую принимает мыльная плёнка натянутая на жёстко фиксированный каркас, в рассмотренной выше задаче каркас состоял из двух параллельных соосных окружностей. Мыльная плёнка имея сильное поверхностное натяжение пытается "стянуться" и занять как можно меньшую площадь. Когда ей мешает давление попавшего внутрь неё воздуха получается стабильный мыльный пузырь, а когда её края зафиксированы на какой-то поверхности или кривой, то получается минимальная поверхность с заданной границей. Вопрос о существовании и построении минимальной поверхности для заданной граничной кривой называется проблемой Плато. Решение, довольно неожиданно для казалось бы трёхмерной задачи получается комплексно-аналитическими методами.
Замечание: Можно заметить, что не через любые две точки в верхней полуплоскости можно провести цепную линию указанного выше вида. Это отвечает случаям когда экстремаль не является гладкой кривой. А ещё через некоторые конфигурации пар точек проходит не одна цепная линия а две. Можно проверить, что одна из них, нижняя, для функционала площади экстремумом не будет, это будет аналог точки перегиба.

3 Геодезические

3.1 Длины на поверхностях и многообразиях

Рассмотрим (под)многообразие $M \subset \mathbb{R}^3$ и какие-нибудь локальные координаты (u, v) на нём. Всякая кривая на M является кривой и в $\mathbb{R}^3$ а значит, определена её длина в $\mathbb{R}^3$. Теперь можно попробовать определить "длины" векторов и кривых на M в терминах координат (u,v) условием их равенства уже известным длинам в $\mathbb{R}^3$. Как выглядит элемент длины в $\mathbb{R}^3$ мы хорошо знаем, $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. То есть на самом деле у нас имеется евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, с помощью которого определяется квадрат длины всякого вектора, а нас интересует ограничение данного скалярного произведения, или квадратичной формы на M в локальных координатах M. Рассмотрим как это устроено в ряде простых случаев.

- $M = \{y - z = 0\}$ - плоскость в $\mathbb{R}^3$. Самые простые координаты можно взять например так: $(u,v) = (x,y)$. Берём кривую $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ в M. Какова длина её вектора скорости в объемлющем пространстве? В $\mathbb{R}^3$ кривая имеет вид $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = \big(u(t), v(t), v(t)\big)$ Получаем для вектора скорости:

$$|\dot\gamma(t)|^2 = \dot x^2(t) + \dot y^2(t) + \dot z^2(t) = \dot u^2(t) + 2\dot v^2(t)$$

Получается, в координатах (u,v) квадрат элемента длины имеет вид

$$dl^2 = du^2 + 2dv^2$$

- $M = \{z = f(x,y)\}$ - поверхность в $\mathbb{R}^3$, график какой-то (гладкой) функции. Опять берём те же координаты $(u,v) = (x,y)$, кривую $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$, получаем

$$|\dot\gamma(t)|^2 = \dot x^2(t) + \dot y^2(t) + \dot z^2(t) = \dot u^2(t) + \dot v^2(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot u(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\dot v(t)\right)^2$$

$$dl^2 = \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)du^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}dudv + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)dv^2$$

- $M = \{g(x,y,z) = 0\}$ этот случай конечно же формально через теорему о неявной функции сводится к предыдущему, но нам полезнее будет рассмотреть его более прямым образом. Итак, пусть (u,v) координаты на M и тогда M можно задать параметрически:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Получаем
$$|\dot\gamma(t)|^2 = \dot x^2(t) + \dot y^2(t) + \dot z^2(t)$$

и соответственно

$$|\dot\gamma(t)|^2 = (\dot u(t), \dot v(t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix}$$

или
$$|\dot\gamma(t)|^2 = \big(\dot u(t), \dot v(t)\big) \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec r}{\partial u}\frac{\partial \vec r}{\partial u} & \frac{\partial \vec r}{\partial u}\frac{\partial \vec r}{\partial v} \\ \frac{\partial \vec r}{\partial v}\frac{\partial \vec r}{\partial u} & \frac{\partial \vec r}{\partial v}\frac{\partial \vec r}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix}$$

где через $\overrightarrow{r}$ обозначен вектор

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{pmatrix}$$

Таким образом, для квадрата элемента длины получаем

$$dl^2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}dudv + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}dv^2$$

- Самый общий случай – n-мерное (под)многообразие M в $\mathbb{R}^m$. В $\mathbb{R}^m$ координаты $x^1, \cdots, x^m$, на M координаты $q^1, \cdots, q^n$. Совершенно аналогично предыдущему случаю получаем

$$dl^2 = \sum g_{ij}(\mathbf{q})dq^i dq^j$$

где $g_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q^j}$. Матрица $G = \{g_{ij}\}$ называется метрикой (вообще-то метрическим тензором) на многообразии M. По нашему построению матрица G симметрична, непрерывно зависит от $\mathbf{q}$, а соответствующая ей квадратичная форма положительно определена. Такие метрики называются римановыми. Всякая матрица G (точнее 2-ковариантное тензорное поле g_{ij}) с указанными свойствами задаёт метрику, то есть определяет какую-то "длину" со всеми обычными свойствами длины на многообразии M.

Пример Рассмотрим сферические координаты (r, φ, θ) в $\mathbb{R}^3$. Элемент длины:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

За многообразие M выберем сферу $r = R_0$. Координаты на ней (в некоторой области) возьмём естественно (φ, θ). Тогда в них $dl^2 = R_0^2(\sin\theta d\varphi^2 + d\theta^2)$ и метрика g_{ij} имеет вид $G = diag(R_0^2 \sin^\theta, R_0^2)$.

3.2 Кратчайшие

Раз мы научились определять длины касательных векторов к многообразию M, а следовательно и длины кривых на нём, то возникает вопрос о существовании и описании кривых наименьшей длины на многообразии, соединяющих две заданные точки. Такие кривые называются геодезическими. (Это одно из возможных эквивалентных определений, подробнее эти объекты будут рассмотрены в курсе дифференциальной геометрии) Как же устроены геодезические на многообразии M с римановой метрикой g_{ij}? Вроде бы понятно что надо делать. Квадрат элемента длины как мы уже видели имеет вид $dl^2 = g_{ij}(\mathbf{q})dq^i dq^j$ соответственно функционалом, сопоставляющим кривой $\mathbf{q}(t)$ её длину будет

$$S^*[\mathbf{q}(t)] = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j}\,dt$$

Если попробовать выписать уравнения Эйлера-Лагранжа то из

$$\frac{\partial L^*}{\partial q^k} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^k} = \frac{g_{kj}\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}$$

получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{kj}\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}\right) = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}$$

Если раскрыть левую часть получится что-то очень длинное и не очень понятное. Вместо этого попробуем другой подход. Рассмотрим такой функционал:

$$S^\dagger[\mathbf{q}(t)] = \int_a^b \frac{g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j}{2}dt$$

"механический" смысл его совершенно прозрачен – это кинетическая энергия свободной частицы, живущей на поверхности с метрикой g_{ij}. То есть, его экстремали это "прямые" в этой метрике, ведь если частица свободная, сил никаких не действует то она движется равномерно и прямолинейно. Посмотрим на уравнения этих экстремалей.

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j$$

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = g_{ik}\dot{q}^i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i + g_{ik}\ddot{q}^i$$

Хотелось бы посимметричнее. Замечаем

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i\right)$$

Получаем

$$g_{ik}\ddot{q}^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = g_{ik}\ddot{q}^i + \Gamma_{k,ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$$

где

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right) \text{ символ Кристоффеля}$$

Если бы мы уже знали дифференциальную геометрию, то немедленно увидели бы, что это известное уравнение геодезических, в другом стандартном определении, через параллельный перенос, а не через минимум длины. Давайте проверим, что эти кривые будут и геодезическими в смысле нашего определения, то есть докажем следующее утверждение.

Теорема 1 *Если кривая $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ является экстремалью функционала $S^\dagger[\mathbf{q}(t)]$, то она будет экстремалью и для функционала $S^*[\mathbf{q}(t)]$*

Видим, что лагранжианы связаны следующим образом $L^* = \sqrt{2L^\dagger}$. Как могут быть связаны их экстремали? Посмотрим как устроен более общий случай $L^* = f(L^\dagger)$. Обозначим k-ую компоненту левой части уравнения Эйлера-Лагранжа через $L_k^\dagger$:

$$L_k^\dagger = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_k^* = \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial f(L^\dagger)}{\partial \dot{q}^k}\right) - \tfrac{\partial f(L^\dagger)}{\partial q^k} = \tfrac{d}{dt}\left(f'(L^\dagger)\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k}\right) - f'(L^\dagger)\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial q^k} = \\ = f'(L^\dagger)L_k^\dagger + \left(\tfrac{d}{dt}f'(L^\dagger)\right)\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = f'(L^\dagger)L_k^\dagger + f''(L^\dagger)\tfrac{dL^\dagger}{dt}\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial q^k} \end{aligned}$$

Смотрим что такое $\frac{dL^\dagger}{dt}$:

$$\frac{dL^\dagger}{dt} = \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial L^\dagger}{\partial t} = \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) - L_i^\dagger \dot{q}^i$$

Замечаем, что наш $L^\dagger$, квадратичен по скоростям, и следовательно

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = 2L^\dagger$$

Получается

$$\frac{dL^\dagger}{dt} = \frac{d}{dt}(2L^\dagger) - L_i^\dagger\dot{q}^i \Rightarrow \frac{dL^\dagger}{dt} = L_i^\dagger\dot{q}^i \Rightarrow L_k^* = f'(L^\dagger)L_k^\dagger + f''(L^\dagger)\frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k}L_i^\dagger\dot{q}^i$$

Как видим, если для всех i выполняется $L_i^\dagger\big|_{\widehat{\mathbf{q}}} = 0$ то $L_k^*\big|_{\widehat{\mathbf{q}}} = 0$ для всех k. То есть экстремали $S^\dagger$ будут экстремалями и для S^*. Итак геодезические, определяемые как кратчайшие, совпадают с траекториями движения свободной частицы в соответствующей метрике.

Замечание: Чем отличаются экстремали этих двух задач? Тем, что значение функционала S^* зависит только от кривой, способ её пробегания на результат не влияет (если $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ экстремаль - кратчайшая - то $\widehat{\mathbf{q}}\big(f(t)\big)$ тоже будет экстремалью), экстремали же функционала $S^\dagger$ дают не только траекторию движения частицы, но и динамику, то есть они привязаны к "собственному времени" частицы. Что такое собственное время в терминах S^*? Это такая параметризация кривой, при которой модуль вектора скорости постоянен, ("свободная" частица движется "равномерно"!) или, что то же самое, параметризация длиной кривой или её натуральным параметром.

4 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции:

Задача: *Найти метрику, лагранжиан, первые интегралы и выписать уравнения геодезических на поверхности вращения $f(r,z) = 0$, где (r, φ, z) цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$*

Задача: *Показать, что на заданной выше поверхности вращения для фиксированной геодезической пересекает все параллели* $r\cos\psi = const$ *где* ψ *угол между геодезической и параллелью.*

Задача: *Показать, что на поверхности вращения параллель будет являться геодезической если и только если касательные к меридианам в её точках параллельны оси вращения.*

Задача: *Показать, что пересечение однополостного гиперболоида* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$ *с плоскостью* $z = const \neq 0$ *не является геодезической на этом гиперболоиде*