

# Лагранжева механика 6 (2016/2017)

В.А. Побережный

## 1 Принцип наименьшего действия

Зачем нам понадобилась эта теория о поиске минимумов в банаховых пространствах? Интерес наш вполне практический и объясняется принципом наименьшего действия.

### 1.1 Формулировка

**Принцип Гамильтона:** *Всякая (механическая) система (с обобщёнными координатами  $q_1, \dots, q_n$ ) характеризуется некоторой функцией*

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

*причём динамика системы определяется данной функцией следующим образом. Если в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  система занимала положения  $\mathbf{q}^{(0)}$  и  $\mathbf{q}^{(1)}$  соответственно, то реальная траектория движения системы  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  доставляет наименьшее возможное значение функционала*

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

*среди всех возможных траекторий  $\mathbf{q}(t)$  таких что  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$  и  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$ . Функция  $L$  называется лагранжианом, а функционал  $S$  действием.*

Конечно же сразу возникает множество вопросов. Какого класса траектории  $\mathbf{q}(t)$  рассматриваются? Насколько корректно и однозначно определена функция  $L$  по системе? Для каких вообще систем этот принцип справедлив? Как находить функцию  $L$  для заданной системы? Откуда он берётся?

Самый интересный и содержательный конечно же последний вопрос. Для некоторого простейшего ограниченного класса задач его можно получить с помощью принципа Д'Аламбера из ньютонова формализма, но строго говоря, в общем случае принцип наименьшего действия не берётся ниоткуда, то есть он не выводится, а “выдаётся” как разумный способ экстраполяции нашего опыта наблюдений за окружающим миром. Таким образом, принцип Гамильтона является “законом природы”. При таком довольно неясном фундаменте принцип наименьшего действия, тем не менее, показывает на практике удивительную универсальность. Помимо классической механики он широко и успешно применяется в оптике, электродинамике, релятивистской механике, теории струн.

Далее, в наших приложениях, для (консервативных) систем классической механики функцией  $L$  или лагранжианом системы будет являться разность кинетической и потенциальной энергий системы. То есть объектом

минимизации является среднее разности кинетической и потенциальной энергий. Тут сразу можно уже заметить некоторое преимущество лагранжева формализма перед Ньютоновым. Энергии как кинетическая, так и потенциальная являются величинами **скалярными** их намного проще преобразовывать и дифференцировать при заменах координат, чем **векторные** ускорения и силы входящие в уравнения Ньютона. Кроме того, нет никаких требований к инерциальности координат в которых мы работаем. Есть конечно и минусы, системы с непотенциальными силами типа трения из рассмотрения выпадают. То что лагранжиан зависит только от координат, скоростей и времени и не зависит от старших производных отвечает той же идее что и у Ньютона – для однозначного предсказания всего будущего поведения системы достаточно знать её координаты и скорости в начальный момент времени.

Последнее замечание – интегральные функционалы, зависящие от координат и их первых производных не являются экзотикой имеющей отношение только к механическим системам или вообще задачам исключительно физического происхождения. Весьма много чисто геометрических задач о нахождении кратчайших кривых или поверхностей минимальной площади описываются лагранжианами именно такого вида, их мы рассмотрим позже.

## 1.2 Предыстория и наводящие соображения

- Уже в древней греции был известен закон отражения света – угол падения равен углу отражения. Пытаясь объяснить этот экспериментальный факт Герон предложил следующую эквивалентную формулировку: из всех возможных путей луч света выбирает кратчайший. На чертеже с помощью элементарной симметрии (отражения) легко увидеть что равенство углов действительно отвечает кратчайшему пути.

Вставить картинку

- Следующий шаг, тоже связанный с геометрической оптикой, это закон Снеллиуса. На границе двух прозрачных сред угол падения света на поверхность связан с углом преломления как

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

где  $\alpha_{1,2}$  соответствующие углы,  $n_{1,2}$  показатели преломления сред, а  $v_{1,2}$  скорости света в данных средах.

Картинку вставить

Позднее Ферма было замечено, что и это наблюдение может быть сформулировано в терминах минимизации - из всех путей свет движется по тому, который проходится за наименьшее время. Это естественное обобщение предыдущего случая в котором минимум длины достигался очевидно одновременно с минимумом времени.

**Замечание:** Конечно же и Ферма, и Снеллиус имели чисто умозрительные представления о скорости света в различных средах, измерить их никакими возможностями в то время не было. То есть формально

закон преломления говорит лишь о том, что отношение синусов равно какой-то константе, но смысл этой константы действительно был понят и декларирован явно уже в те времена. Кстати, упомянутый выше закон отражения был получен примерно за тысячу лет до изобретения настоящих зеркал.

Интересно отметить, что во время возникновения задачи о брахистохроне, упомянутой в предыдущей лекции, разделы физики, связанные с движением света и оптикой считались более разработанными и освоенными чем механика, и первое решение задачи о брахистохроне было получено в те времена с помощью переформулировки, сводящей задачу к движению луча света в среде с непрерывно меняющимся коэффициентом преломления, зависящим от высоты (глубины).

Примерно на таком фундаменте в 18 веке начались попытки распространить идеи минимальности с использованием оптико-механических аналогий на различные модели классической механики. Деятельность эта заняла значительное время, потребовала многих усилий, и уточнений. Над проблемой работали Лейбниц, Мопертюи, Эйлер, Лагранж и относительно окончательная формулировка была получена Гамильтоном.

- Ещё один пример. По Ньютону, если на материальную точку не действуют никакие силы, то двигаться она будет равномерно и прямолинейно. Для удобства рассмотрим одномерную задачу, общий случай ничем не отличается. Итак, точка вышедшая в момент времени ноль из начала координат со скоростью  $v_0$  будет двигаться по закону  $\hat{x}(t) = v_0 t$  и попадёт в момент времени 1 в точку  $v_0$  на оси  $O_x$ . Утверждение – из всех возможных траекторий  $x(t)$  таких что  $x(0) = 0$  и  $x(1) = v_0$  реальная (указанная выше) даёт минимум функционала

$$S[x(t)] = \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt$$

то есть, для всех  $x(t)$  с указанными граничными условиями выполняется  $S[x(t)] \geq S[\hat{x}(t)] = v_0^2$ . Действительно, так как

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau$$

получаем

$$\int_0^1 \dot{x}(t) dt = v_0$$

и неравенство которое надо доказать превращается в

$$\int_0^1 \dot{x}^2(t) dt \geq v_0^2 = \left( \int_0^1 \dot{x}(t) dt \right)^2$$

или в более привычной форме –

$$\sqrt{\int_0^1 \dot{x}^2(t) dt} \geq \int_0^1 \dot{x}(t) dt$$

известное неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим или Коши-Буняковского, или Гёльдера. То есть реальная траектория движения свободной частицы даётся минимальной экстремалью функционала  $S$ .

### 1.3 Уравнения Эйлера-Лагранжа

Попробуем теперь практически применить наши методы анализа в банаховых пространствах к поиску экстремалей функционала действия механической системы. Сразу же, практически на нулевом шаге мы встречаем критическое препятствие – множество функций  $\mathbf{q}(t)$  гладкости  $C^k$  с граничными условиями  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$  и  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$  не образуют векторного, и следовательно банахова пространства! Ни их сумма, ни произведение на числовой множитель не являются допустимыми траекториями системы так как не подходят под граничные условия. Проблема конечно, но не очень страшная. Дело в том, что на мы на самом деле в данном случае ищем *условный экстремум*. Вспомнив, или элементарно проверив, что  $f_1(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{q}(t_0) - \mathbf{q}^{(0)}$  и  $f_2(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{q}(t_1) - \mathbf{q}^{(1)}$  являются хорошими, непрерывными и гладкими функционалами на  $C^k[t_0, t_1]$ . Мы можем заметить, что в принципе наименьшего действия говорится о поиске условного экстремума ограничения функционала  $S$  на “(под)многообразии”  $M$  в банаховом пространстве  $C^k[t_0, t_1]$

$$M = \left\{ \mathbf{q}(t) \mid f_1(\mathbf{q}(t)) = 0, f_2(\mathbf{q}(t)) = 0 \right\} \subset C^k[t_0, t_1]$$

То есть на самом деле нас интересуют экстремали функционала  $S|_M$ . (Под многообразием  $M$  совершенно аналогично случаю  $\mathbb{R}^n$  задаётся набором гладких функций (функционалов) и техника поиска условного экстремума тоже переносится из евклидова пространства практически без изменений. Как мы помним, так она давалась методом множителей Лагранжа. Метод успешно адаптируется и на бесконечномерный анализ, мы рассмотрим его позже, но в интересующей нас задаче многообразии  $M$  устроено настолько просто, что экстремали можно элементарно найти в лоб, не изобретая общую теорию.

В самом деле как устроено касательное пространство  $T_\varphi M$  к кривой (функции)  $\varphi \in M$ ? Совершенно аналогично конечномерному евклидову случаю касательное пространство к  $\{f_1 = 0, f_2 = 0\}$  в точке  $\varphi$  состоит векторов скоростей кривых лежащих в  $M$ , то есть из всех векторов  $h \in C^k[t_0, t_1]$  для которых

$$(\delta f_1)_\varphi(h) = (\delta f_2)_\varphi(h) = 0$$

В нашем случае очевидно  $(\delta f_1)_\varphi(h) = h(t_0)$ , а  $(\delta f_2)_\varphi(h) = h(t_1)$ . То есть касательное пространство к любой точке многообразия  $M$  состоит из функций (кривых)  $h(t)$  таких что  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  и нам надо найти такое  $\varphi \in M$  чтобы выполнялось  $\delta S_\varphi(h) = 0$  для всех  $h \in T_\varphi M \subset T_\varphi C^k[t_0, t_1]$ . С новыми уточнениями о поведении  $h$  можно довести вычисления примера с которого

мы начали лекцию до более простого и наглядного вида. Итак:

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi(h) &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \Big|_{q=\varphi} h(t) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=\varphi} \dot{h}(t) \right) dt = \\ &\quad \text{второе слагаемое берём по частям} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \Big|_{q=\varphi} h(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=\varphi} \right) h(t) \right) dt + \left( \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=\varphi} h(t) \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &\quad \text{внеинтегральное слагаемое равно нулю из граничных условий на } h \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \Big|_{q=\varphi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=\varphi} \right) \right] h(t) dt \end{aligned}$$

Это уже очень хороший вид для функционала от  $h$ .

**Предложение 1** *Линейный функционал*

$$A(h) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)dt = 0$$

где  $a(t) \in C^0[t_0, t_1]$  равен нулю тождественно для всех  $h \in C^k[t_0, t_1]$  таких что  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  тогда и только тогда когда  $a(t) \equiv 0$

Доказательство - очевидно (упражнение).

**Следствие 1** *Если  $\mathbf{q}(t) = \varphi(t)$  экстремаль функционала действия*

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

в классе  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$ ,  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$  (то есть в ограничении на многообразии  $M$ ), то

$$\left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right) \Big|_{\mathbf{q}=\varphi} = 0$$

Данное соотношение называется уравнениями Эйлера-Лагранжа. Оно будет нашим основным инструментом в решении задач лагранжевой механики.

Что всё это значит и как это работает?

## 1.4 Элементарные примеры

**Свободная частица** Траектория частицы в  $\mathbb{R}^3$  это параметризованная кривая  $\mathbf{q}(t)$ . Кинетическая энергия  $T = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$ , потенциальной энергии нет  $U = 0$ . Лагранжиан  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$ . Вычисляем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m\dot{\mathbf{q}}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{q}}) = -m\ddot{\mathbf{q}} = 0$$

Решение - линейные функции  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}t$ . Постоянные (вектора)  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{v}$  определяются из граничных условий

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{(0)} + (\mathbf{q}^{(1)} - \mathbf{q}^{(0)}) \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

как и положено, частица движется равномерно и прямолинейно.

**Частица в потенциале** Траектория частицы  $\mathbf{q}(t)$ . Кинетическая энергия та же самая  $T = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$ , потенциальная энергии  $U = U(\mathbf{q})$ . Лагранжиан  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U = m\dot{\mathbf{q}}^2/2 - U(\mathbf{q})$ . Вычисляем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = -\nabla U, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m\dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m\ddot{\mathbf{q}}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$-\nabla U - m\ddot{\mathbf{q}} = 0 \iff m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U$$

Получили уже известный второй закон Ньютона для потенциальной силы. Дифференциальное уравнение второго порядка, решение определяется граничными условиями.

**Невзаимодействующие частицы** Две частицы в  $\mathbb{R}^3$  с траекториями  $\mathbf{q}_1(t)$  и  $\mathbf{q}_2(t)$  соответственно. “Общей координатой” будет столбец  $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t))$  Кинетическая энергия  $T(\dot{\mathbf{q}}) = m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2/2 + m_2\dot{\mathbf{q}}_2^2/2$ , потенциальной энергии нет  $U = 0$ . Лагранжиан равен  $L = T = m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2/2 + m_2\dot{\mathbf{q}}_2^2/2$ . Считаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} m_1\dot{\mathbf{q}}_1 \\ m_2\dot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 \\ m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 \\ m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} = 0$$

и частицы опять движутся равномерно прямолинейно и независимо как и должно быть.

## 2 Разбор задач

Хорошо, проверили на тривиальных известных примерах, всё совпадает с известными из других подходов результатами, только считать теперь дольше и сложнее, в чём же выгода? Попробуем разобрать какую-нибудь менее тривиальную задачу. Сначала вспомогательное вычисление для математического маятника

### 2.1 Математический маятник

Картинка

Обобщённой координатой назначаем  $\theta$  угол отклонения от вертикали. Траектория системы соответственно имеет вид  $\theta(t)$ . Линейная скорость частицы равна  $l\dot{\theta}$ , кинетическая энергия  $T = m(l\dot{\theta})^2/2$ , потенциальная энергия (с точностью до константы)  $U = mgh = -mgl \cos \theta$ . Лагранжиан:

$$L = m \frac{(l\dot{\theta})^2}{2} + mgl \cos \theta$$

Считаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

известное уравнение нелинейного (математического) маятника.

## 2.2 Неинерционный маятник или маятник без гравитации

Рассмотрим плоский двузвенный маятник в отсутствие гравитации. Можно ли принудительно вращая с постоянной скоростью  $\omega$  первое звено маятника длины  $R$  добиться того, чтобы второе звено длины  $l$  вело себя как обычный математический маятник в поле тяжести земли? Можно ли вращая с постоянной скоростью часы-ходики добиться чтобы они показывали правильное время в невесомости, то есть создать гравитацию при помощи вращения? Известный приём из научной фантастики.

Картинку.

Введём обобщённую координату  $\theta$  угол отклонения второго звена маятника от оси первого. Тогда координаты частицы в плоскости в момент времени  $t$  будут

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t + l \cos(\omega t + \theta) \\ y = R \sin \omega t + l \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

скорости

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\omega \sin \omega t - l(\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y} = R\omega \cos \omega t + l(\omega + \dot{\theta}) \cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

Кинетическая энергия

$$T = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} = \frac{m}{2} \left( R^2 \omega^2 + l^2 (\omega + \dot{\theta})^2 + 2R\omega l (\omega + \dot{\theta}) \cos \theta \right)$$

Гравитации и потенциала нет, поэтому  $L = T$ . Далее,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mR\omega l (\omega + \dot{\theta}) \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{2} \left( 2R\omega l \cos \theta + 2l^2 (\omega + \dot{\theta}) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -mR\omega l \sin \theta \cdot \dot{\theta} + ml^2 \ddot{\theta}$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$ml^2\ddot{\theta} + mR\omega^2l \sin \theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{R\omega^2}{l} \sin \theta = 0$$

показывает, что при  $R\omega^2 = g$  система действительно симулирует математический маятник в поле тяжести земли.

### 3 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции:

**Задача:** Написать аналог уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала вида

$$S(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) dt$$

**Задача:** Выписать по лагранжианам уравнения движения

- $L(x, \dot{x}, t) = 1/2e^{\alpha t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$
- $L(x, \dot{x}) = e^{-x^2 - \dot{x}^2} + 2\dot{x}e\left(-x^2 \int_0^{\dot{x}} e^{-y^2} dy\right)$

**Задача:** Математический маятник движется в поле тяжести земли в вертикальной плоскости. Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной прямой проходящей через точку подвеса маятника. Выписать уравнения движения, определить угловую скорость плоскости при которой нижнее положение равновесия маятника становится неустойчивым.

**Задача:** Выписать функционал длины на плоскости и найти его экстремали для кривых, соединяющих заданные точки.