18.04.2017 С/к R-матрица

Лекция №14

Построим в алгебре $Fun_q(SL(m))$ аналоги элементарных симметрических функций классической матричной алгебры и, в частности, введём ~~понятие~~ квантовый детерминант.

Рассмотрим вначале классическую конструкцию. Пусть M — числовая $m \times m$ матрица с собственными значениями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$. Элементарные симметрические полиномы от μ_i

$$c_k(M) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \mu_{i_1} \ldots \mu_{i_k}$$

$$1 \le k \le m$$

являются суммой всех главных миноров матрицы M, имеющих порядок k. Эту сумму можно представить в виде:

$$e_k(M) = Tr_{(12\ldots k)}(P_-^{(k)} M_1 \ldots M_k),$$

где $P_-^{(k)}$ антисимметризатор k-го порядка в $V^{\otimes k}$. Кроме того, определяются степенные суммы $p_k(M) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i^k = Tr(M^k)$.

Элементарные симметрические
полиномы и степенные суммы связаны соотношениями Ньютона:

$$e_1(M) - p_1(M) = 0$$

$$2e_2 - e_1 p_1 + p_2 = 0$$

$$3e_3 - e_2 p_1 + e_1 p_2 - p_3 = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$k e_k - e_{k-1} p_1 + e_{k-2} p_2 - \ldots + (-1)^k p_k = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Сама матрица M удовлетворяет матричному тождеству Гамильтона-Кэли:

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k M^{m-k} e_k(M) \equiv 0.$$

Оказывается, все эти объекты и соотношения обобщаются на квантовый случай.

Определим аналоги элементарных симметрических полиномов следующими формулами:

$\boxed{0}$ $$e_k(T) = \mathrm{Tr}_{R(1\ldots k)}\left(A^{(k)}_{1\ldots k} T_1 T_2 \ldots T_k\right)$$

$$1 \le k \le m.$$

В силу свойств антисимметризаторов $A^{(k)}$ величины $e_k(T) \equiv 0 \ \forall k > m$.

Самый старший ненулевой элементарный симметрический полином пропорционален квантовому детерминанту:

$\boxed{O}$ $$\det_q T := q^{m^2} e_m(T) =$$

$$= q^{m^2} Tr_{R(1\ldots m)}\left(A^{(m)} T_1 \ldots T_m\right) =$$

$$= Tr_{(1\ldots m)} A^{(m)} T_1 \ldots T_m \equiv v_{\langle 1\ldots m|} T_1 \ldots T_m u_{|1\ldots m\rangle}$$

Последнее равенство выполнено в силу свойства матриц D^R, определяющих R-след:

$$D_1^R \ldots D_m^R u_{|1\ldots m\rangle} = q^{-m^2} u_{|1\ldots m\rangle}.$$

$\boxed{\text{Зам}}$ Смысл нормировочного множителя q^{m^2} в определении $\det_q T$ проявится при изучении поведения $\det_q T$ при отображении коумножения: $\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T$ — так называемое "групповое свойство" детерминанта. Если в определении $\det_q T$ выбрать другой множитель, то это групповое свойство не будет выполнено.

Справедливо следующее важное утверждение.

IV 1°. Элементарные симметрические полиномы $e_k(T)$ $1 \le k \le m$ порождают коммутативную подалгебру в $Fun_q(GL(m))$ — подалгебру Бете:
$$e_k(T)\,e_p(T) - e_p(T)\,e_k(T) = 0$$
$\forall\, k, p$.

2°. Для квантового детерминанта справедливо соотношение:
$$(T\cdot N)_1 \det_q T = \det_q T\,(N\cdot T)_1\,,$$
где $N = \|N^i{}_j\|$ — числовая $m\times m$ матрица и
$$N^i{}_j = \sum_{\{\alpha\}} u^{i\alpha_2\ldots\alpha_m}\, v_{\alpha_2\ldots\alpha_m j}\,.$$

Если N — скалярная матрица (т.е. $N = a\mathbb{1}$), то $\det_q T$ — центральный элемент.

3°. $\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T$

Доказательство:

Мы ограничимся доказательством

пунктов 2° и 3°.

Вначале установим вспомогательное <u>матричное</u> тождество:

Лемма

$$\boxed{A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m = T_1 \ldots T_m A^{(m)}_{1\ldots m} = (\det{}_q T)\, A^{(m)}_{1\ldots m}}$$

Зам. В классическом матричном анализе аналог этой формулы хорошо известен. В этом случае:

$$A^{(m)}{}^{i_1\ldots i_m}{}_{j_1\ldots j_m} \Rightarrow \varepsilon^{i_1\ldots i_m} \varepsilon_{j_1\ldots j_m} \;)$$

где $\varepsilon^{i_1\ldots i_m}$ - полностью антисимметрический тензор m-го ранга (тензор Леви-Чивиты) и утверждение леммы в классике принимает вид:

$$\sum_{\{\alpha\}} \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_m} M^{\alpha_1}{}_{j_1} \ldots M^{\alpha_m}{}_{j_m} = (\det M)\, \varepsilon_{j_1\ldots j_m},$$

что, фактически, есть определение $\det M$.

<u>Доказательство леммы</u>:

Проектор $A^{(m)}$ есть некоторый <u>полином</u> от матриц $R_1, R_2, \ldots, R_{m-1}$. Поскольку

$$R_k T_k T_{k+1} = T_k T_{k+1} R_k \quad \forall k \geq 1, \text{ то}$$

$$A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m = T_1 \ldots T_m A^{(m)}_{1\ldots m}.$$

Кроме того, $A^{(m)}$ — идемпотент (проектор) $\Rightarrow$ $\Rightarrow A^{(m)} = A^{(m)} \cdot A^{(m)}$.

В результате, получаем следующее:

$$A^{(m)} T_1 \ldots T_m = A^{(m)} \cdot A^{(m)} T_1 \ldots T_m = A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m A^{(m)}_{1\ldots m}.$$

Если расписать последнее выражение через компоненты $A^{(m)}$, то получим:

$$A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m A^{(m)}_{1\ldots m} = \underline{u_{|1\ldots m\rangle}}\, v_{\langle 1\ldots m|} T_1 \ldots T_m u_{|1\ldots m\rangle} \cdot \underline{v_{\langle 1\ldots m|}}$$

Но свертка $v_{\langle 1\ldots m|} T_1 \ldots T_m u_{|1\ldots m\rangle}$ есть в точности $Tr_{(1\ldots m)}\left(A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m\right) = \det_q T$.

Подчёркнутые матрицы $u_{|1\ldots m\rangle}$ и $v_{\langle 1\ldots m|}$ образуют матрицу проектора $A^{(m)}$, то есть $A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m A^{(m)}_{1\ldots m} = A^{(m)}_{1\ldots m} \det_q T$, т.е. лемма доказана. ∎

Вернёмся к доказательству п. 2° Утверждения. В силу RTT соотношений в нашей алгебре справедливо тождество

$$R_1 \ldots R_m T_1 \ldots T_{m+1} = T_1 \ldots T_{m+1} R_1 \ldots R_m.$$

Умножим это тождество слева на матрицу $\mathbb{1}_1 A^{(m)}_{2\ldots m+1}$ и воспользуемся техническим свойством, доказанным на прошлой лекции:

$$A^{(m)}_{2\ldots m+1} R_1 \ldots R_m = (-1)^{m-1} q m_q A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m} :$$

$$A^{(m)}_{2\ldots m+1} R_1 \ldots R_m T_1 \ldots T_{m+1} = (-1)^{m-1} q m_q A^{(m)}_{2\ldots m+1} \underbrace{A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m}\, T_{m+1} =$$

= (применим лемму для подчёркнутого выражения) $= \underline{(-1)^{m-1} q m_q A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m} (\det_q T)\, T_{m+1}} =$

$$= A^{(m)}_{2\ldots m+1} T_1 \ldots T_{m+1} R_1 \ldots R_m =$$

$$= T_1 \underbrace{A^{(m)}_{2\ldots m+1} T_2 \ldots T_{m+1}}_{\text{применяем лемму}} R_1 \ldots R_m = \underline{T_1 (\det_q T) A^{(m)}_{2\ldots m+1} \cdot R_1 \ldots R_m} =$$

$$= \underline{(-1)^{m-1} q m_q T_1 (\det_q T) A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m}}.$$

$\Rightarrow$ Получаем в итоге:

$$\boxed{(\det_q T)\, A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m}\, T_{m+1} = T_1 A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m} (\det_q T).} \qquad (\bigstar)$$

Выпишем структуру матрицы $A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m}$ (она имеет нетривиальные компоненты в $V^{\otimes m+1}$)!

$$\left(A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m}\right)^{i_1\ldots i_{m+1}}_{j_1\ldots j_{m+1}} =$$

$$\sum_{\{\alpha\}} \underbrace{u^{i_2\ldots i_{m+1}} v_{\alpha_2\ldots\alpha_m j_{m+1}}}_{A^{(m)}_{2\ldots m+1}} \cdot \underbrace{u^{i_1\alpha_2\ldots\alpha_m} v_{j_1\ldots j_m}}_{A^{(m)}_{1\ldots m}} =$$

$= u^{i_2\ldots i_{m+1}} v_{j_1\ldots j_m} N^{i_1}{}_{j_{m+1}}$, где введено обозначение $N^a{}_b = \sum_{\{\alpha\}} u^{a\alpha_2\ldots\alpha_m} v_{\alpha_2\ldots\alpha_m b}$.

Таким образом, наше равенство (A) принимает вид:

$$u^{i_2\ldots i_{m+1}} v_{j_1\ldots j_m} (\det\nolimits_q T) N^{i_1}{}_a T^a{}_{j_{m+1}} =$$

$$= T^{i_1}{}_a N^a{}_{j_{m+1}} (\det\nolimits_q T) u^{i_2\ldots i_{m+1}} v_{j_1\ldots j_m} .$$

Пользуясь свойством $\sum_{\{\alpha\}} u^{\alpha_1\ldots\alpha_m} v_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = 1$, свернём последовательно с $v_{i_2\ldots i_{m+1}}$ и $u^{j_1\ldots j_m}$, и получим требуемое свойство:

$$(\det\nolimits_q T)(N\cdot T) = (T\cdot N)(\det\nolimits_q T)$$

Для R-матрицы Дринфельда-Джимбо $N = \mathbb{1} \Rightarrow$ в $Fun_q(GL(m))$ $\det_q T$ —

центральный элемент:

$$T(\det_q T) = (\det_q T)T.$$

Это, в частности, позволяет перейти к $Fun_q(SL(m))$, факторизовав $Fun_q(GL(m))$ по идеалу $\langle \det_q T - 1 \rangle$.

Свойство $\det_q T$ относительно операции коумножения доказывается легко:

$$\det_q T = Tr_{(1\ldots m)}\left(A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\Delta(\det_q T)} = Tr_{(1\ldots m)}\left(A^{(m)}_{1\ldots m} \Delta(T_1)\ldots\Delta(T_m)\right) =$$

$$= \left\{ \Delta(T_k) = T_k \otimes T_k \right\} =$$

$$= Tr_{(1\ldots m)}\left(A^{(m)} \cdot A^{(m)}\, T_1 T_2 \ldots T_m \otimes T_1 T_2 \ldots T_m\right) =$$

$$= Tr_{(1\ldots m)}\, \underline{A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m} \otimes \underline{A^{(m)}_{1\ldots m} T_1 \ldots T_m} =$$

$$= \underbrace{Tr_{(1\ldots m)}\left(A^{(m)} A^{(m)}\right)}_{=1} \det_q T \otimes \det_q T = \underline{\det_q T \otimes \det_q T}.$$

Заметим ещё раз, что в силу нашего определения $\det_q T$ возникший справа численный множитель $= 1$ и мы имеем „групповой закон коумножения" для $\det_q T$. ∎