Лекция №13

В дальнейшем нам потребуется следующее техническое утверждение.

$\boxed{\text{У}}$ Для гекковской R-матрицы со свойствами
$$\begin{cases} A^{(m+1)}_{1\ldots m+1} \equiv 0 \\ \operatorname{rank} A^{(m)}_{1\ldots m} = 1 \end{cases}$$
(примером такой R-матрицы является матрица Дринфельда-Джимбо размером $m^2 \times m^2$) справедливы соотношения:

(i) $A^{(m)}_{1\ldots m} R_m R_{m-1} \ldots R_1 = (-1)^{m-1} q\, m_q A^{(m)}_{1\ldots m} A^{(m)}_{2\ldots m+1}$

(ii) $\cancel{R_m R_{m-1} \ldots A^{(m)}_{1\ldots}}$
$R_1 R_2 \ldots R_m A^{(m)}_{1\ldots m} = (-1)^{m-1} q\, m_q A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m}$

(iii) $A^{(m)}_{2\ldots m+1} R_1 R_2 \ldots R_m = (-1)^{m-1} q\, m_q A^{(m)}_{2\ldots m+1} A^{(m)}_{1\ldots m}$

(iv) $R_m \ldots R_2 R_1 A^{(m)}_{2\ldots m+1} = (-1)^{m-1} q\, m_q A^{(m)}_{1\ldots m} A^{(m)}_{2\ldots m+1}$

Доказательство: Напомним: $R_k \equiv R_{k\,k+1}$

Все соотношения доказываются одинаково, поэтому приведём подробное доказательство для i).

Перед тем, как проводить доказательство, сделаем два замечания. Во-первых, прямым следствием уравнения Янга-Бакстера $R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}$ является свойство:

$$(\star)\quad R_k (R_m \ldots R_1) = (R_m \ldots R_1) R_{k+1} \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}.$$

и следствием этого соотношения является равенство:

$$F(R_1, \ldots, R_{m-1}) R_m \ldots R_1 = R_m \ldots R_1 F(R_2, \ldots, R_m),$$

где F – $\forall$ полином от R-матриц $R_1, \ldots, R_{m-1}$. $A^{(m)}_{1\ldots m}(R_1, \ldots, R_{m-1})$ – пример такого полинома, поэтому

$$A^{(m)}_{1\ldots m} R_m \ldots R_1 = R_m \ldots R_1 A^{(m)}_{2\ldots m+1}.$$

Поэтому $i) \Leftrightarrow iV)$. Аналогично $ii) \Leftrightarrow iii)$.

Во-вторых, то же соотношение $(\star)$ позволяет убедиться в правдоподобности $i)$:

$$(A^{(m)} R_m \ldots R_1) \cdot R_k = A^{(m)} R_{k-1} R_m \ldots R_1,$$

$$\forall 2 \le k \le m$$

и так как $A^{(m)}_{1\dots m} R_i = -\frac{1}{9} A^{(m)}_{1\dots m}$ =3=
при $1 \le i \le m-1$, то при умножении
справа на R_k объект $A^{(m)}_{1\dots m} R_m \dots R_1$
ведёт себя как $A^{(m)}_{2\dots m}$:

$$A^{(m)}_{1\dots m} R_m \dots R_1 \cdot R_k = \underbrace{A^{(m)} R_{k-1}}_{-\frac{1}{9} A^{(m)}} R_m \dots R_1 =$$

$$= -\frac{1}{9} A^{(m)}_{1\dots m} R_m \dots R_1. \quad 2 \le \forall k \le m$$

Поскольку это — характеристическое свойство антисимметризатора $A^{(m)}_{2\dots m}$, нам, фактически, нужно найти точный коэффициент пропорциональности между $A^{(m)}_{1\dots m} R_m \dots R_1$ и $A^{(m)}_{1\dots m} A^{(m)}_{2\dots m+1}$.

Доказательство проводится на основе рекуррентной формулы для $A^{(k)}$:
Прежде всего получим вспомогательную формулу для $m_q A^{(m)}_{1\dots m} A^{(m)}_{2\dots m+1}$.
Будем последовательно применять рекуррентную формулу к проектору $A^{(m)}_{2\dots m+1}$:

$$\underline{m_q} A^{(m)}_{1\dots m} \underline{A^{(m)}_{2\dots m+1}} = A^{(m)}_{1\dots m} A^{(m-1)}_{2\dots m} \left(q^{m-1} - (m-1)_q R_m \right) \cdot A^{(m-1)}_{2\dots m} =$$

$$= q^{m-1} A^{(m)}_{1\dots m} - \underline{(m-1)_q} A^{(m)}_{1\dots m} R_m \underline{A^{(m-1)}_{2\dots m}}.$$

При переходе к этой формуле, мы воспользовались свойством:

$$A^{(m)}_{1\dots m} A^{(m-1)}_{2\dots m} = A^{(m)}_{1\dots m}.$$

Разлагая таким же образом $(m-1)_q A^{(m-1)}_{2\dots m}$, получаем:

$$m_q A^{(m)}_{1\dots m} A^{(m)}_{2\dots m+1} = A^{(m)}_{1\dots m} \left(q^{m-1} 1\!\!1 - q^{m-2} R_m \right) +$$

$$+ (m-2)_q A^{(m)}_{1\dots m} R_m R_{m-1} A^{(m-2)}_{2\dots m-1}.$$

Для получения этого нужно учесть, что $A^{(m-2)}_{2\dots m-1}$ <u>коммутирует</u> с R_m: $R_m A^{(m-2)}_{2\dots m-1} = A^{(m-2)}_{2\dots m-1} R_m$.

$\Rightarrow$ Во всех слагаемых, где <u>нет R_{m-1}</u>, проектор $A^{(m-2)}_{2\dots m-1}$ поглощается проектором $A^{(m)}_{1\dots m}$:

$$A^{(m)}_{1\dots m} A^{(m-2)}_{2\dots m-1} = A^{(m)}_{1\dots m}.$$

Дальнейшие шаги очевидны (разлагаем $(m-2)_q A^{(m-2)}_{2\dots m-1}$ и т.д.). В итоге получаем искомую вспомогательную формулу:

$$m_q A^{(m)}_{1\dots m} A^{(m)}_{2\dots m+1} = A^{(m)}_{1\dots m} \left(q^{m-1} 1\!\!1 - q^{m-2} R_m + q^{m-3} R_m R_{m-1} + \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^k q^{m-k-1} R_m \dots R_{m-k+1} + \dots + (-1)^{m-1} R_m \dots R_2 \right).$$

Воспользуемся теперь тем, что $A^{(m+1)} \equiv 0$.

$$0 = (m+1)_q A^{(m+1)}_{1\ldots m+1} = A^{(m)}_{1\ldots m}(q^m - m_q R_m) A^{(m)}_{1\ldots m} =$$

$$= q^m A^{(m)}_{1\ldots m} - \underline{m_q A^{(m)}_{1\ldots m} R_m A^{(m)}_{1\ldots m}}.$$

Применим рекуррентную формулу для правого $A^{(m)}_{1\ldots m}$. (Для доказательства соотношения ii) надо разлагать левый $A^{(m)}_{1\ldots m}$)!

$$0 = q^m A^{(m)}_{1\ldots m} - q^{m-1} A^{(m)}_{1\ldots m} R_m + \underline{(m-1)_q A^{(m)}_{1\ldots m} R_m A^{(m-1)}_{1\ldots m-1}}.$$

Дальше поступаем аналогично, разлагая правый антисимметризатор. В итоге, получим такой результат:

$$0 = A^{(m)}_{1\ldots m}\left(q^m 1 - q^{m-1} R_m + q^{m-2} R_m R_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1} q R_2 \ldots R_m\right) +$$

$$+ (-1)^m A^{(m)}_{1\ldots m} R_m \ldots R_1.$$

Первое слагаемое только множителем q отличается от вспомогательной формулы для $m_q A^{(m)}_{1\ldots m} A^{(m)}_{2\ldots m+1}$, полученной на предыдущей странице, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 0 = q\, m_q\, A^{(m)}_{1\ldots m} A^{(m)}_{2\ldots m+1} + (-1)^m A^{(m)}_{1\ldots m} R_m \ldots R_1 = 6 =$$

После переноса второго слагаемого в левую часть и умножения на $(-1)^{m-1}$, получим i). Как уже отмечалось, iv) $\Leftrightarrow$ i). ■

Итак, краткая сводка некоторых свойств q-антисимметризаторов:

1°. $\mathrm{Tr}_{R(1\ldots k)} A^{(k)} = \dfrac{m_q!}{q^{mk}\, k_q!\,(m-k)_q!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}\, A^{(k)} = \lim_{q\to 1} \mathrm{Tr}_{R(1\ldots k)} A^{(k)} = \binom{m}{k}$$

2°. $A^{(m+1)} = 0$, $\mathrm{rank}\, A^{(m)} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A^{(m)}_{1\ldots m} = u_{|1\ldots m\rangle}\, v_{\langle 1\ldots m|}$$

$$v_{\langle 1\ldots m|}\, u_{|1\ldots m\rangle} = 1$$

3°. $$A^{(k)}_{1\ldots k} D^R_1 \ldots D^R_k = D^R_1 \ldots D^R_k A_{1\ldots k}$$

$$D^R_1 \ldots D^R_m\, u_{|1\ldots m\rangle} = q^{-m^2} u_{|1\ldots m\rangle}$$

$$v_{\langle 1\ldots m|} D^R_1 \ldots D^R_m = q^{-m^2} v_{\langle 1\ldots m|}$$

4°. $$A^{(m)}_{1\ldots m} R_m \ldots R_1 = (-1)^{m-1} q\, m_q\, A^{(m)}_{1\ldots m} A^{(m)}_{2\ldots m+1}$$

В заключение лекции рассмотрим вопрос о количестве <u>независимых</u> соотношений на генераторы t^i_j, накладываемых матричным равенством

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}.$$

$\boxed{У}$

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12} \Leftrightarrow \begin{cases} A^{(2)}_{12}T_1T_2S^{(2)}_{12}=0 \\ S^{(2)}_{12}T_1T_2A^{(2)}_{12}=0 \end{cases},$$

где $A^{(2)} = \dfrac{q\mathbb{1}-R}{2_q}$

$S^{(2)} = \dfrac{1}{2_q}\left(\dfrac{1}{q}\mathbb{1}+R_{12}\right)$ — q-антисимметризатор и q-симметризатор в $V^{\otimes 2}$.

<u>Доказательство:</u>

(i) Пусть выполнена <u>правая</u> часть. (Эти соотношения считаются выполненными в фактор-алгебре тензорной алгебры $T(\mathcal{T})$, где $\mathcal{T}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(t^i_j)$ по векторам из $\mathcal{T}^{\otimes 2}$, выписанных справа).

Расписывая $A^{(2)}$ и $S^{(2)}$ получаем вектора:

$$2_q^2 A^{(2)}T_1T_2S^{(2)} = T_1T_2 + qT_1T_2R_{12} - \frac{1}{q}R_{12}T_1T_2 - R_{12}T_1T_2R_{12}$$

$$2_q^2 S^{(2)}T_1T_2A^{(2)} = T_1T_2 - \frac{1}{q}T_1T_2R_{12} + qR_{12}T_1T_2 - R_{12}T_1T_2R_{12}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$2_q^2 A^{(2)}_{12} T_1 T_2 S^{(2)}_{12} - 2_q^2 S^{(2)}_{12} T_1 T_2 A^{(2)}_{12} =$$

$$= \left(q+\frac{1}{q}\right)\left(T_1 T_2 R_{12} - R_{12} T_1 T_2\right).$$

Поскольку параметр q не является корнем из 1, то $q+\frac{1}{q} = 2_q \neq 0$. Следовательно, в фактор-алгебре по соотношениям, порожденным $\{A^{(2)}_{12} T_1 T_2 S^{(2)}_{12} \cup S^{(2)}_{12} T_1 T_2 A^{(2)}_{12}\}$ выполняются и соотношения $R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12}$.

ii) Пусть выполнены соотношения

$$R_{12} T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12}.$$

Тогда $(q - R_{12}) T_1 T_2 = T_1 T_2 \overbrace{(q - R_{12})}^{2_q A^{(2)}_{12}}$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{(2)}_{12} T_1 T_2 S^{(2)}_{12} = T_1 T_2 A^{(2)}_{12} S^{(2)}_{12} = 0,$$

поскольку $A^{(2)} S^{(2)} = \frac{1}{2_q^2}(q - R)\left(\frac{1}{q} + R\right) = 0$ в силу условия Гекке.

Аналогично и для $S^{(2)}_{12} T_1 T_2 A^{(2)}_{12} = 0$. ■

В силу только что доказанного утверждения количество независимых соотношений на генераторы t^i_j, задаваемых матричным равенством
$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12},$$
равно размерности линейной оболочки, натянутой на $A^{(2)}_{12}T_1T_2S^{(2)}_{12}$ и $S^{(2)}_{12}T_1T_2A^{(2)}_{12}$.

Эта размерность равна сумме размерностей оболочек, натянутых на $A^{(2)}_{12}T_1T_2S^{(2)}_{12}$ и $S^{(2)}_{12}T_1T_2A^{(2)}_{12}$, поскольку их пересечение состоит только из нулевого вектора.

Действительно, указанные оболочки являются образами проекционных операторов на $\mathcal{T}^{\otimes 2} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(T_1T_2)$ вида:
$$P_1 = (A^{(2)}\triangleright)(\triangleleft S^{(2)}) \quad \text{и} \quad P_2 = (S^{(2)}\triangleright)(\triangleleft A^{(2)}):$$
$$P_1(\mathcal{T}^{\otimes 2}) := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(A^{(2)}T_1T_2S^{(2)})$$
$$P_2(\mathcal{T}^{\otimes 2}) := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(S^{(2)}T_1T_2A^{(2)}).$$
Эти проекторы ортогональны:
$$P_1\cdot P_2 = (A^{(2)}S^{(2)}\triangleright)(\triangleleft A^{(2)}S^{(2)}) \equiv 0 \Rightarrow$$
~~ортогональны~~ взаимные или

подпространства имеют только $= \{0\} =$ нулевой общий вектор.

Но $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(A^{(2)}T_1T_2S^{(2)})) = \mathrm{rank}\,A^{(2)} \cdot \mathrm{rank}\,S^{(2)}$

$$\mathrm{rank}\,A^{(2)} = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$\mathrm{rank}\,S^{(2)} = \lim_{q\to 1} \mathrm{Tr}_{R(12)} T_2 \left(\frac{\frac{1}{q}1\!\!1 + R_{12}}{2_q}\right) =$$

$$= \lim_{q\to 1} \frac{m_q(m+1)_q}{q^{2m}\,2_q} = \frac{m(m+1)}{2}$$

Таким образом, число независимых соотношений в $R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}$ равно

$$2\,\mathrm{rank}\,A^{(2)}\,\mathrm{rank}\,S^{(2)} = \frac{m^2(m^2-1)}{2}.$$

Как следствие, размерность квадратичной компоненты алгебры $\mathrm{Fun}_q(SL(m))$ равна

$$(m^2)^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{2} = \frac{m^2(m^2+1)}{2}.$$

Это совпадает с размерностью классической (коммутативной) алгебры $\mathrm{Fun}(SL(m))$.