Листок 14. Дифференцируемые отображения

Анализ, 1 курс, **20.06.2017**

14◇1 Напишите уравнения касательной плоскости к поверхности уровня дифференцируемой функции $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ в точке (x_0, y_0, z_0) и докажите, что эта плоскость ортогональна градиенту ∇F в этой точке.

14◇2 Пусть $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция в линейно связной области G, пусть $f'_y = 0$ на G. Верно ли, что G не зависит от y в области G?

14◇3 Дом можно строить, если угол наклона почвы не превышает 30 градусов, иначе он сползет. Опишите область, где можно строить дом
а) на горе, описываемой графиком функции $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$;
б) на перевале, описываемой графиком функции $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.

14◇4 Пусть $x = e^u \cos v,\ y = e^u \sin v,\ z = uv$.
Найти производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

14◇5 Найти условия существования обратного отображения $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, к отображению, задаваемому равенствами $x = uv \cos w,\ y = uv \sin w,\ z = u + v + w$ и вычислить производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$.

14◇6 Найти частную производную $\frac{\partial f^{21}}{\partial x^9 \partial y^{12}}$ функции $\frac{x + y}{1 - x^2 y^3}$ в начале координат.

14◇7 Найдите все точки экстремума функции $f(x, y) = 3x^2 y - x^3 - y^4$ на плоскости.

14◇8 Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.001$ имеет корень вблизи нуля, и найдите его первые 10 знаков.

14◇9 Приведите пример отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющего $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ и не имеющего неподвижных точек.

14◇10 Пусть отображение T преобразует метрический компакт X в себя, причём $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$. Доказать, что T имеет в X единственную неподвижную точку.

14◇11 Пусть монотонно возрастающая функция f преобразует отрезок $[0, 1]$ в себя.
а) Докажите, что у f есть по крайней мере одна неподвижная точка.
б) Докажите, что по крайней мере в одной из таких точек функция f непрерывна.

14◇12 Пусть $1 < \lambda < 3$ и $f(x) = \lambda x(1 - x)$. Докажите, что для всякой точки $x_0 \in (0, 1)$ последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к неподвижной точке отображения $x \mapsto f(x)$.